Über den Entwurf eines adaptiven zeitdiskreten Mehrgrössenbeobachters mit exponentieller bis schrittoptimaler Konvergenz

Dissertation
zur Erlangung des Grades eines
Doktor-Ingenieurs

dem Fachbereich Elektrotechnik / Physik
der Universität Bremen
vorgelegt
von
Dipl.-Ing. W. Wöhlke

Bremen
1985

UNIV. LEIDEN BIBL.

Über den Entwurf eines adaptiven zeitdiskreten Mehrgrössenbeobachters mit exponentieller bis schrittoptimaler Konvergenz

Dissertation
zur Erlangung des Grades eines
Doktor-Ingenieurs

dem Fachbereich Elektrotechnik / Physik
der Universität Bremen
vorgelegt
von
Dipl.-Ing. W.Wöhlke

Bremen
1985

Diese Arbeit hat dem Promotionsausschuß Dr.-Ing. der Universität Bremen als Dissertation unter dem Titel

" Über den Entwurf eines adaptiven zeitdiskreten Mehrgrößenbeobachters mit exponentieller bis schrittoptimaler Konvergenz "

vorgelegen.
An dem Promotionsverfahren haben Prof. Dr.-Ing. G. Ludyk und Prof. Dr.-Ing. D. Popovic' als Gutachter mitgewirkt.

Das Kolloquium hat am 4. Dezember 1985 stattgefunden.

INHALTSVERZEICHNIS

1.0	Einleitung	1
1.1	Beurteilungskriterien von adaptiven Beobachtern	2
1.2	Anwendungsgebiet	3
1.3	Historische Entwicklung von adaptiven Beobachtern	4
1.4	Erweiterung	5
1.5	Einführung in die folgenden Kapitel	5
2.0	Problemstellung	7
2.1	Transformation auf Identifikationsnormalform	8
2.2	Über die Kenntnis der Beobachtbarkeitsindices	11
3.0	Parametrisierte Struktur des Mehrgrößenbeobachters	12
3.1	Umformung der Zustandsdifferenzengleichung des i-ten Untersystems	12
3.2	Parametrisierte Struktur des Beobachters für das i-te Untersystem	17
3.3	Vereinfachung der parametrisierten Darstellung	20
3.4	Beschreibung der Ausgangsgröße für die parametrisierte Form des Beobachters	27
3.5	Verdeutlichung des parametrisierten Beobachters an einem Beispiel	30
4.0	Parameteradaption	37
4.1	Definition des Anfangs-, Parameter- und Ausgangsfehlers	39
4.2	Fehlerfunktional und Parameterverstellgesetz	40
4.3	Verallgemeinerter Ansatz zur Parameteradaption	42
4.4	Konvergenzanalyse	44
	4.4.1 Parameterfehlergleichung	44
	4.4.2 Exponentielle Konvergenz des Parameter- und Zustandsfehlers	46

4.5 Auslegung der Matrizen $\tilde{A}_i$, $\tilde{K}_i$, $\bar{A}_i$, $\bar{B}_i$, $\bar{C}_i$ 63
4.5.1 Sicherung der exponentiellen Konvergenz mit Hilfe eines Vergessensfaktors 63
4.5.2 Auslegung der Matrizen für eine exponentielle bis schrittoptimale Konvergenz 64

5.0 Zusammenstellung des Beobachteralgorithmus 66
5.1 Bemerkungen zur Berechnung der Inversen $\underline{R}_{i_k}^{-1}$ 71

6.0 Numerisches Beispiel 72
6.1 Aufgabenstellung und Systembeschreibung 72
6.2 Beobachteralgorithmus 74
6.3 Über die Anregung durch die Eingangsgrößen 82
6.4 Simulationsergebnisse 83

7.0 Zusammenfassung 90

8.0 Verzeichnis der verwendeten Formelzeichen 92

9.0 Literaturverzeichnis 94

1.0 Einleitung

Bei der Synthese von Reglern mit Zustandsrückführung wird vorausgesetzt, daß sämtliche Zustandsgrößen zugänglich sind.

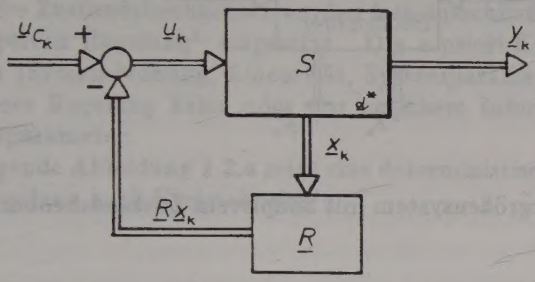

Bild 1.0.a: Darstellung eines zeitdiskreten lin. Mehrgrößensystems mit Zustandsrückführung.

In den meisten Fällen wird diese Voraussetzung aus folgenden Gründen nicht erfüllt sein:

1. **Einige Zustandsgrößen sind nicht oder nur mit hohem apparativem Aufwand meßbar.**
2. **Durch Zustandstransformation haben die Zustandsgrößen ihre physikalische Bedeutung verloren.**

Um dennoch die moderne Reglersynthese mit Zustandsrückführung realisieren zu können, wurden Zustandsbeobachter[1] entwickelt. Diese Zustandsbeobachter ermitteln aus vergangener Ein- und Ausgangsvektorfolge den Zustandsvektor des Systems zum momentanen Zeitpunkt. Für die Auslegung von Zustandsbeobachtern (Kalman [12], Luenberger [25]) eines linearen zeitinvarianten Systems werden die Systemparameter und die Systemordnung benötigt. Sind die Systemparameter zum Teil oder auch ganz unbekannt, werden sogenannte adaptive Zustandsbeobachter eingesetzt. Diese rekonstruieren aus vergangener Ein- und Ausgangsvektorfolge $\{\underline{u}_k\}$, $\{\underline{y}_k\}$ die Systemzustände $\underline{x}_k$ und die Systemparameter $\underline{\alpha}^*$ eines linearen zeitinvarianten Systems.

[1] **Aufgrund unterschiedlicher Systemeigenschaften 'Rekonstruierbarkeit' und 'Beobachtbarkeit' wäre das Wort 'Zustandsrekonstruierer' präziser.[21]**

Bild 1.0.b zeigt das Mehrgrößensystem

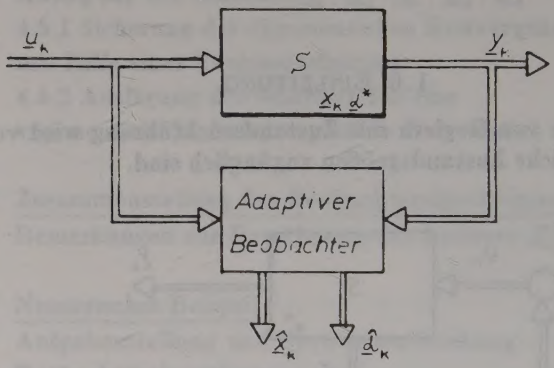

Bild 1.0.b: Mehrgrößensystem mit adaptivem Zustandsbeobachter.

und den adaptiven Beobachter. Die Ausgangsgrößen $\underline{\hat{\alpha}}_k$, $\underline{\hat{x}}_k$ des adaptiven Beobachters sollen nun gegen die unbekannten Systemparameter $\underline{\alpha}^*$ und die unbekannten Systemzustände $\underline{x}_k$ konvergieren.

1.1 Beurteilungskriterien von adaptiven Beobachtern

Entscheidend für die Auswahl von adaptiven Beobachtern ist die Tatsache, unter welchen Bedingungen und mit welcher Geschwindigkeit die rekonstruierten Systemparameter $\underline{\hat{\alpha}}_k$ und die rekonstruierten Systemzustände $\underline{\hat{x}}_k$ gegen die wahren Systemparameter $\underline{\alpha}^*$ und Systemzustände $\underline{x}_k$ konvergieren:

$$\underline{\hat{\alpha}}_k \longrightarrow \underline{\alpha}^* \ , \tag{1.1-1}$$

$$\underline{\hat{x}}_k \longrightarrow \underline{x}_k \ . \tag{1.1-2}$$

Der wahre Grund hierfür ist die Tatsache, Parameterschwankungen bei realen Systemen, die infolge langsam zeitveränderlicher Vorgänge[1] entstehen, durch den Beobachter erkennen und mit gewünschter Dynamik ausregeln zu können.
Weiterhin soll der Realisierungsaufwand mit betrachtet werden. Zeitkontinuierliche adaptive Beobachter erfordern bei der Realisierung eine so enorme Anzahl von Integratoren und Multiplizierern, daß eine reale

[1]Solche Vorgänge entstehen z.B. bei Alterung, Erwärmung von Bauteilen.

Ausführung nur in Sonderfällen wirtschaftlich vertretbar wäre. Die Implementation zeitdiskreter Beobachteralgorithmen auf Prozeß- und Mikrorechnern ist aus wirtschaftlichen und technischen Gründen empfehlenswert, so daß eine zeitdiskrete Beschreibung des Problems begründet ist.

1.2 Anwendungsgebiet

Adaptive Zustandsbeobachter werden fast ausschließlich in der parameteradaptiven Regelung[1] eingesetzt. Die a-priori-Kenntnisse über das System (Systemordnung, Linearität, Systemparameter, ...) beinhalten bei dieser Regelung keine oder nur unsichere Informationen über die Systemparameter.
Die folgende Abbildung 1.2.a zeigt eine deterministische parameteradaptive Regelung nach Kreisselmeier[2].

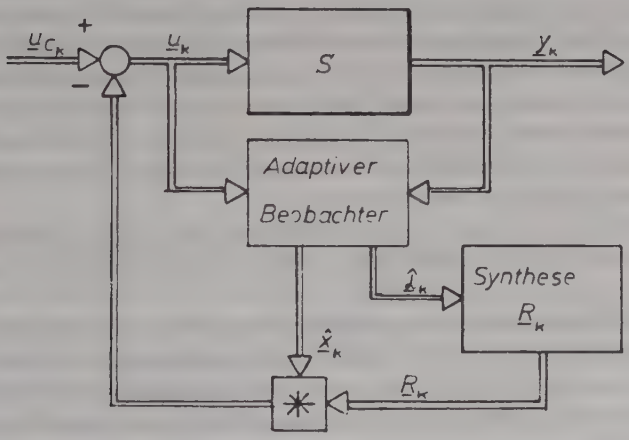

Bild 1.2.a : Parameteradaptive Regelung für Mehrfachsysteme

Die adaptive Regelung nach Kreisselmeier [17] , [18] beinhaltet die Möglichkeit, gegenüber selbstabstimmender Regelung (Self Tuning Control) [3] und adaptiver Regelung durch Modellvergleich (Model Refe-

[1]Begriff und Einteilung der adaptiven Regelung wurden von Saridis [27] übernommen.
[2]Kreisselmeier stellte adaptive Regelung nur für Einfachsysteme vor.

rence Control) [20], instabile Systeme zu stabilisieren und eine optimale adaptive Zustandrückführung auszulegen. Die Möglichkeit betont, daß abgeschlossene Lösungen nicht existieren und somit den Stand momentaner Forschungen auf diesem Gebiet darstellen.

1.3 Historische Entwicklung von adaptiven Beobachtern

Erstmalig wurde von Caroll und Lindorff [5] 1973 das adaptive zeitkontinuierliche Beobachtungsproblem für Einfachsysteme behandelt. Mit Hilfe der Ljapunow-Synthese wurde die asymptotische Konvergenz von $\underline{\hat{\alpha}}_k \longrightarrow \underline{\alpha}^*$ und $\underline{\hat{z}}_k \longrightarrow \underline{z}_k$ unter Einwirkung zusätzlicher Hilfsignale nachgewiesen. Weitere Arbeiten (Lüders und Narendra 1973 [23]; Kudva und Narendra 1974 [19]) verbesserten und vereinfachten den Beobachter von Caroll und Lindorff.
1974 wurde von Lüders und Narendra [24] durch eine neue kanonische Form ein auf Unterteilung in Einfachsysteme beruhender Mehrgrößenbeobachter vorgestellt, dessen asymptotische Konvergenz ohne zusätzliche Hilfssignale nachgewiesen werden konnte. Im gleichen Jahr konnte von Caroll und Lindorff [4] eine reduzierte Version vorgestellt werden.
Ein wesentlicher Fortschritt wurde 1977 von Kreisselmeier [15] erreicht, der einen adaptiven Beobachter mit exponentieller Konvergenz entwikkelte. Dieser beruhte auf einer besonderen parametrisierten Form des Kalman-Beobachters, in der die Zustände eine lineare Funktion der Parameter sind. Als Nachteil wurde festgestellt, daß die Konvergenz von der Eingangsamplitude abhängig war.
Danach wurde von Yang, Itakura, Nishikawa [33] 1981 ein allgemeiner Mehrgrößenbeobachter auf Grundlage dieser parametrisierten Form vorgestellt.
1983 und 1984 wurde die Empfindlichkeit der Konvergenz gegenüber der Anregungsamplitude für zeitdiskrete Einfachsysteme (Wöhlke [31]) und für zeitkontinuierliche Einfachsysteme (Inoue und Iwai [9]) beseitigt. Zusätzlich wurde 1984 unter Verwendung weiterer a-priori-Kenntnisse eine in der Ordnung reduzierte Parameteradaption angegeben.
Das Systemverhalten des Beobachters wurde von Suhl [29] 1984 bei einer speziellen Klasse von deterministischen Störungen für zeitkontinuierliche und zeitdiskrete Einfachsysteme verbessert.
Einen allgemeinen zeitkontinuierlichen Mehrgrößenbeobachter, dessen Konvergenz unabhängig von der Anregungsamplitude ist, stellten 1984 Inoue, Iwai, Ishitobi und Tokumaru [10] vor. Dieser Beobachter beruht auf einer Erweiterung des Mehrgrößenbeobachters von Yang, Itakura, Nishikawa 1981.

1.4 Erweiterung

Der zeitkontinuierliche adaptive Mehrgrößenbeobachter von Inoue, Iwai, Ishitobi und Tokumaru [10] zeigt eine exponentielle Konvergenz des Parameter- und Zustandsfehlers gegen Null.
Die Konvergenzgeschwindigkeit wird durch einen Vergessensfaktor begrenzt. Wird dieser zu groß gewählt, so konvergieren Parameter- und Zustandsfehler nicht hinreichend schnell, wird dieser zu klein gewählt, so kann bei beschränkter Rechengenauigkeit keine Konvergenz gezeigt werden.
Betrachtet man den Kalman-Beobachter, so besteht hier die Möglichkeit, eine exponentielle bis schrittoptimale Konvergenz durch eine Fehlermatrix vorzugeben.
Diese Möglichkeit wird bei dem obengenannten adaptiven Beobachter nicht durch eine reine Diskretisierung erreicht. Um in dieser Arbeit die Konvergenzeigenschaften des zeitdiskreten adaptiven Beobachters verbessern zu können, wurde der Ansatz zur Parameteradaption verallgemeinert. Mit dem verallgemeinerten Ansatz zur Parameteradaption konnte hier ein adaptiver zeitdiskreter Beobachter mit exponentieller bis schrittoptimaler Konvergenz entwickelt werden. Durch die diskrete Darstellung und die verallgemeinerte Parameteradaption wird für eine leichte Implementation auf Prozeßrechnern bei gleichzeitiger Verbesserung der Konvergenz gesorgt.

1.5 Einführung in die folgenden Kapitel

Das folgende Kapitel 2.0 beschreibt notwendige und hinreichende Voraussetzungen und eine geeignete Normalform für die Ableitung des adaptiven Beobachters. Zusätzlich werden Erläuterungen zur Kenntnis der Beobachtbarkeitsindices gegeben.
Im Kapitel 3.0 wird die zeitdiskrete parametrisierte Form des Kalman-Beobachters hergeleitet. Zur Verdeutlichung der aufwendigen Ableitungen werden Strukturdiagramme gezeigt. Zusätzlich wird die parametrisierte Form des Mehrgrößenbeobachters am Beispiel eines Mehrgrößensystems siebter Ordnung dargestellt.
Im Kapitel 4.0 wird die Parameteradaption und somit der adaptive Beobachter beschrieben. Zunächst wird ein bekanntes Fehlerkriterium zur Ableitung des Parameterverstellgesetzes angegeben. Dieses Parameterverstellgesetz wird dann durch strukturelle Erweiterungen verallgemeinert. Mit diesem verallgemeinerten Ansatz zur Parameteradaption

wird eine exponentielle bis schrittoptimale Konvergenz des Parameter- und Zustandsfehlers gezeigt. Im letzten Abschnitt des Kapitels werden besondere Hinweise für die Auslegung der Matrizen zur Einhaltung der Konvergenzgeschwindigkeit gegeben.
Für die Praxis wird im Kapitel 5.0 der komplette Beobachteralgorithmus zusammengestellt. Anschließende Simulationen verdeutlichen die Ergebnisse an einem Beispiel.
Eine letzte Interpretation der erzielten Ergebnisse mit Ausblick auf weitere mögliche Forschungsziele beendet diese Arbeit.

2.0 Problemstellung

Bei der Synthese des folgenden adaptiven Zustandsbeobachters wird von der mathematischen Zustandsbeschreibung

$$\underline{x}'_{k+1} = \underline{A}' \underline{x}'_k + \underline{B}' \underline{u}_k \quad , \quad \underline{x} \in R^n, \underline{u} \in R^r \tag{2.0–1}$$

$$\underline{y}_k = \underline{C}' \underline{x}'_k \quad , \quad \underline{y} \in R^m \tag{2.0–2}$$

eines linearen, zeitinvarianten, stabilen Mehrgrößensystems, daß vollständig steuerbar und beobachtbar ist, ausgegangen. Das System soll weiterhin zeitlich linear unabhängige Ausgänge $y_1, y_2, \ldots, y_m$ besitzen, d.h für die Ausgangsmatrix $\underline{C}'$ soll die Bedingung

$$Rang\, \underline{C}' = m \tag{2.0–3}$$

erfüllt sein.
Zusätzlich seien die Beobachtbarkeitsindices $n_1, n_2, \ldots, n_m$ bekannt, so daß das System mit

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_m = n \tag{2.0–4}$$

in m Untersysteme unterteilt wird. Aufgrund dieser a-priori-Kenntnisse über das Mehrgrößensystem wird der adaptive Zustandsbeobachter abgeleitet, der aus der Ein- und der Ausgangsvektorfolge die Systemzustände und die Systemparameter rekonstruiert.

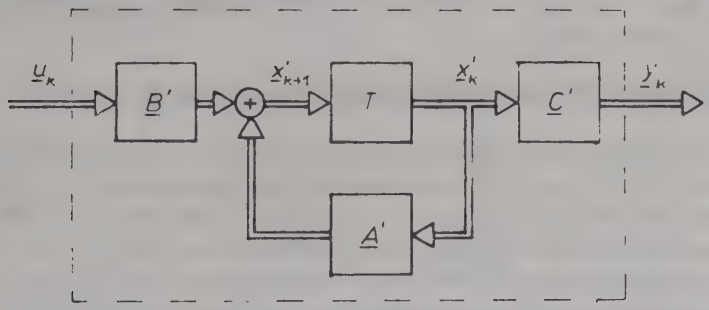

Bild 2.0.: Darstellung des Mehrgrößensystems.

2.1 Transformation auf Identifikationsnormalform

Durch Zustandstransformation wird die mathematische Beschreibung (2.0-1) und (2.0-2) des beobachtbaren Systems auf Identifikationsnormalform

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{A}\,\underline{x}_k + \underline{B}\,\underline{u}_k \tag{2.1-1}$$

$$\underline{y}_k = \underline{C}\,\underline{x}_k \tag{2.1-2}$$

transformiert. Die Systemmatrix

$$\underline{A} := \begin{pmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} & \cdots & \underline{A}_{1m} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} & \cdots & \underline{A}_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \underline{A}_{m1} & \underline{A}_{m2} & \cdots & \underline{A}_{mm} \end{pmatrix} \tag{2.1-3}$$

der Dimension (n, n) wird aus den (n_i, n_i) - Untermatrizen der Form

$$\underline{A}_{ii} := \begin{pmatrix} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \underline{a}_{ii} & \vdots & \ddots & & \vdots \\ & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, m \tag{2.1-4}$$

und den (n_i, n_j) - Untermatrizen der Form

$$\underline{A}_{ij} := \begin{pmatrix} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \underline{a}_{ij} & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad i \neq j \quad , \quad i, j = 1, 2, \ldots, m \tag{2.1-5}$$

aufgebaut. Die (n, r)-dimensionale Eingangsmatrix $\underline{B}$ der Form

$$\underline{B} := \begin{pmatrix} \underline{b}_{11} & \underline{b}_{12} & \cdots & \underline{b}_{1r} \\ \underline{b}_{21} & \underline{b}_{22} & \cdots & \underline{b}_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \underline{b}_{m1} & \underline{b}_{m2} & \cdots & \underline{b}_{mr} \end{pmatrix} \tag{2.1-6}$$

besteht aus den Vektoren $\underline{b}_{ij}$ der Dimension n_i. Die Ausgangsmatrix $\underline{C}$ der Gestalt

$$\underline{C} := \begin{pmatrix} \underline{c}_{11}^T & \underline{c}_{12}^T & \cdots & \underline{c}_{1m}^T \\ \underline{c}_{21}^T & \underline{c}_{22}^T & \cdots & \underline{c}_{2m}^T \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \underline{c}_{m1}^T & \underline{c}_{m2}^T & \cdots & \underline{c}_{mm}^T \end{pmatrix} \tag{2.1-7}$$

wird in die n_i-dimensionalen Vektoren

$$\underline{c}_{ii}^T := \left(1\,0\,\ldots\,0\right) \quad , \quad i = 1,2,\ldots,m \tag{2.1-8}$$

und die n_j-dimensionalen Vektoren

$$\underline{c}_{ij}^T := \left(c_{ij}\,0\,\ldots\,0\right) \quad , \quad i \neq j \quad , \quad i,j = 1,2,\ldots,m \tag{2.1-9}$$

unterteilt, wobei das Element

$$c_{ij} := 0 \quad \text{für alle} \quad i < j \tag{2.1-10}$$

ist.
Der Zustandsvektor $\underline{x}$ in der Zustandsdifferenzengleichung (2.1-1) kann in die m-Zustandsvektoren $\underline{x}_i$

$$\underline{x}_k^T := \left(\underline{x}_1^T\,\underline{x}_2^T\,\ldots\,\underline{x}_m^T\right)_k \tag{2.1-11}$$

der Dimension n_i zerlegt werden.
Die Eingangsgrößen $u_1, u_2, \ldots, u_r$ und die Ausgangsgrößen $y_1, y_2, \ldots, y_m$ werden zum Eingangsvektor

$$\underline{u}_k^T := \left(u_1\,u_2\,\ldots\,u_r\right)_k \tag{2.1-12}$$

und zum Ausgangsvektor

$$\underline{y}_k^T := \left(y_1\,y_2\,\ldots\,y_m\right)_k \tag{2.1-13}$$

in Gleichung (2.1-1) und Gleichung (2.1-2) zusammengefaßt. Nach Abschluß der mathematischen Beschreibung (2.1-1) und (2.1-2) wird angegeben, unter welchen Bedingungen das System mit der Beschreibung (2.0-1) und (2.0-2) auf Identifikationsnormalform transformierbar ist.
Zunächst kann ein beobachtbares System mit der Beschreibung (2.0-1) und (2.0-2) auf Beobachternormalform[1] [1] transformiert werden , wenn das System beobachtbar[2] ist. Durch eine weitere Zustandstransformation

$$\underline{x}_k = \underline{Q}\,\underline{x}_{B_k} \tag{2.1-14}$$

[1] Bezeichnet mit Index " B "
[2] Wurde im Kapitel 2.0 vorausgesetzt.

mit der (n, n)-Matrix

$$\underline{Q} := \begin{pmatrix} \underline{Q}_{11} & & & \\ & \underline{Q}_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \underline{Q}_{mm} \end{pmatrix} \tag{2.1-15}$$

und den Untermatrizen

$$\underline{Q}_{ii} := \begin{pmatrix} 0\,0 & \dots & 0\,1 \\ 0\,0 & \dots & 1\,0 \\ \vdots\,\vdots & \ddots & \vdots\,\vdots \\ 0\,1 & \dots & 0\,0 \\ 1\,0 & \dots & 0\,0 \end{pmatrix} \quad , \quad i = 1, 2, \dots, m \tag{2.1-16}$$

der Dimension (n_i, n_i) kann die Zustandsbeschreibung von Beobachternormalform auf Identifikationsnormalform transformiert werden. Die Zusammenhänge zwischen den zwei Zustandstransformationen werden im folgenden kommutativen Diagramm veranschaulicht.

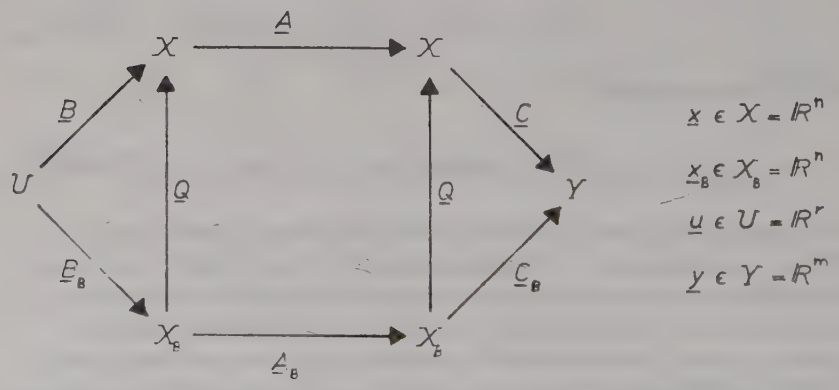

Bild 2.1: Kommutatives Diagramm zwischen Beobachter- und Identifikationsnormalform.

2.2 Über die Kenntnis der Beobachtbarkeitsindices

Mit der Kenntnis der Beobachtbarkeitsindices liegt eine vollständige Information über die Beobachtbarkeitsstruktur eines linearen zeitinvarianten Mehrgrößensystems vor.
Liegen die Beobachtbarkeitsindices von vornherein nicht vor, so können diese durch Strukturidentifikation [8] , [28] aus den Ein- und Ausgangsmeßdaten des Systems ermittelt werden. Hierzu muß das System vollständig beobachtbar und während der Strukturidentifikation in Parametern und Struktur zeitinvariant sein.
Adaptive Beobachter sind aufgrund ihrer hohen Konvergenzgeschwindigkeiten für die Rekonstruktion von Parametern und Zuständen linearer Systeme mit langsam zeitveränderlichen Parametern geeignet.
Die Veränderung der Parameter darf aber keine Veränderung der Beobachtbarkeitsindices ergeben, d.h. die Dimension der beobachtbaren Unterräume darf sich nicht verändern.
Bei beobachtbaren Einfachsystemen und bei beobachtbaren Systemen mit mehreren Eingängen und einem Ausgang ist die Beobachtbarkeitsstruktur durch die Systemordnung gegeben. Bei vollständiger Kenntnis der Struktur eines Mehrgrößensystems sind ebenfalls Rückschlüsse auf die Beobachtbarkeitsindices möglich.
Wichtig bleibt festzustellen, daß adaptive Beobachter robust gegen langsam zeitveränderliche Parameterschwankungen von Systemen reagieren, solange deren Beobachtbarkeitsstruktur erhalten bleibt.

3.0 Parametrisierte Struktur des Mehrgrössenbeobachters

Die parametrisierte Darstellung eines Mehrgrößenbeobachters ist eine alternative, äquivalente Beschreibung zum Kalman-Beobachter, mit dem Vorteil, daß die Zustände eine lineare Funktion der Parameter sind. Hierdurch eignet sich diese Form besonders für das adaptive Beobachtungsproblem.

In diesem Kapitel wird die parametrisierte Form aus der Zustandsbeschreibung des Mehrgrößensystems hergeleitet. Das Mehrgrößensystem mit der Beschreibung (2.1-1) und (2.1-2) wird durch Unterteilung des Zustandsvektors laut Definition (2.1-11) in Untersystemen dargestellt. Ein Untersystem wird durch die Zustandsdifferenzengleichung eines Untervektors $\underline{x}_i$ und deren Ausgangsgleichung beschrieben. Aus dieser Beschreibung des Untersystems wird im Abschnitt 3.1 eine besondere Form entwickelt, die die Ableitung des parametrisierten Beobachters für ein Untersystem in Abschnitt 3.2 ermöglicht. Vereinfachungen dieser aufwendigen parametrisierten Struktur werden im Kapitel 3.3 durchgeführt. Das anschließende Kapitel 3.4 beschreibt die Ausgangsgröße des parametrisierten Beobachters, die im letzten Abschnitt mit der parametrisierten Form an einem Beispiel verdeutlicht wird.

Die Ableitungen der zeitdiskreten parametrisierten Struktur werden in Anlehnung an die Ausführungen [10] über die zeitkontinuierliche parametrisierte Struktur des Beobachters durchgeführt.

3.1 Umformung der Zustandsdifferenzengleichung des i-ten Untersystems

Die Zustandsbeschreibung eines Untersystems

$$\underline{x}_{i_{k+1}} = \underline{A}_{ii}\,\underline{x}_{i_k} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} \underline{A}_{ij}\,\underline{x}_{j_k} + \sum_{j=1}^{r} \underline{b}_{ij}\,u_{j_k} \qquad (3.1\text{-}1)$$

$$y_{i_k} = \sum_{j=1}^{m} \underline{c}_{ij}^{T}\,\underline{x}_{i_k} \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, m \qquad (3.1\text{-}2)$$

wird aus der Zustandsbeschreibung (2.1-1) und (2.1-2) mit den Definitionen (2.1-3), (2.1-6), (2.1-12) und (2.1-13) entwickelt. Zur weiteren Betrachtung werden die (n_i, n_i) -Matrizen

$$\underline{K}_i := \begin{pmatrix} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \underline{k}_{ii} & \vdots & \ddots & & \vdots \\ & 0 & 0 & \dots & 1 \\ & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad i = 1, 2, \dots, m \tag{3.1-3}$$

und die folgenden Lemmata eingeführt:

LEMMA 3.1.A. :

$$(\underline{A}_{ii} - \underline{K}_i) = (\underline{a}_{ii} - \underline{k}_{ii}) \quad \underline{c}_{ii}^T \quad , \quad i = 1, 2, \dots, m . \tag{3.1-4}$$

BEWEIS: Mit den kanonischen Formen der Matrizen $\underline{K}_i$ und $\underline{A}_{ii}$ gemäß den Definitionen (3.1-3) und (2.1-4) wird die Gleichung (3.1-4) durch

$$\begin{pmatrix} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \underline{a}_{ii} & \vdots & \ddots & & \vdots \\ & 0 & 0 & \dots & 1 \\ & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \underline{k}_{ii} & \vdots & \ddots & & \vdots \\ & 0 & 0 & \dots & 1 \\ & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = (\underline{a}_{ii} - \underline{k}_{ii}) \quad \underline{c}_{ii}^T$$

dargestellt. Die Differenz der Matrizen kann durch

$$(\underline{a}_{ii} - \underline{k}_{ii})\,(1\,0 \dots 0) = (\underline{a}_{ii} - \underline{k}_{ii}) \quad \underline{c}_{ii}^T$$

bzw. mit Definition (2.1-8) durch

$$(\underline{a}_{ii} - \underline{k}_{ii})\,\underline{c}_{ii}^T = (\underline{a}_{ii} - \underline{k}_{ii})\,\underline{c}_{ii}^T \quad , \quad i = 1, 2, \dots, m$$

beschrieben werden, womit die Identität gezeigt ist. ∎

LEMMA 3.1.B. :

$$\underline{A}_{ij} \quad = \underline{a}_{ij}\,\underline{c}_{jj}^T \qquad \text{für alle } i \neq j \quad , \quad i, j = 1, 2, \dots, m . \tag{3.1-5}$$

BEWEIS: Die Identität kann mit den Gleichungen (2.1-5) und (2.1-8) gezeigt werden. ∎

Zur weiteren Ableitung wird Gleichung (3.1-4) nach der Matrix

$$\underline{A}_{ii} = (\underline{a}_{ii} - \underline{k}_{ii}) \quad \underline{c}_{ii}^T + \underline{K}_i \quad , \quad i = 1, 2, \dots, m \tag{3.1-6}$$

aufgelöst, so daß die Gleichung (3.1-1) mit der Gleichung (3.1-6) durch die Gleichung

$$\underline{x}_{i_{k+1}} = \underline{K}_i \underline{x}_{i_k} + (\underline{a}_{ii} - \underline{k}_{ii}) \underline{c}_{ii}^T \underline{x}_{i_k} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} \underline{A}_{ij} \underline{x}_{j_k} + \sum_{j=1}^{r} \underline{b}_{ij} \underline{u}_{j_k} ,$$

$$i = 1, 2, ..., m \qquad (3.1\text{-}7)$$

dargestellt werden kann. Die vorherige Gleichung (3.1-7) wird durch Substitution von $\underline{A}_{ij}$ gemäß Gleichung (3.1-5) in

$$\underline{x}_{i_{k+1}} = \underline{K}_i \underline{x}_{i_k} + (\underline{a}_{ii} - \underline{k}_{ii}) \underline{c}_{ii}^T \underline{x}_{i_k} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} \underline{a}_{ij} \underline{c}_{jj}^T \underline{x}_{j_k} + \sum_{j=1}^{r} \underline{b}_{ij} \underline{u}_{j_k} ,$$

$$i = 1, 2, ..., m \qquad (3.1\text{-}8)$$

umgeformt. Die Umformung des zweiten und dritten Terms von Gleichung (3.1-8) in ein Produkt aus Matrix und Vektor ergibt die Beziehung

$$(\underline{a}_{ii} - \underline{k}_{ii}) \underline{c}_{ii}^T \underline{x}_{i_k} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} \underline{a}_{ij} \underline{c}_{jj}^T \underline{x}_{j_k}$$

$$= \left(\underline{a}_{i1} \cdots \underline{a}_{i,i-1} \; (\underline{a}_{ii} - \underline{k}_{ii}) \; \underline{a}_{i,i+1} \cdots \underline{a}_{im} \right) \begin{pmatrix} \underline{c}_{11}^T \underline{x}_{1_k} \\ \underline{c}_{22}^T \underline{x}_{2_k} \\ \vdots \\ \underline{c}_{mm}^T \underline{x}_{m_k} \end{pmatrix} ,$$

$$i = 1, 2, ..., m \quad , \qquad (3.1\text{-}9)$$

die mit Definition der Matrix

$$\underline{T}_i := \left(\underline{a}_{i1} \cdots \underline{a}_{i,i-1} \; (\underline{a}_{ii} - \underline{k}_{ii}) \; \underline{a}_{i,i+1} \cdots \underline{a}_{im} \right) , \quad i = 1, 2, ..., m \qquad (3.1\text{-}10)$$

und des Vektors

$$\underline{y}_{c_k} := \begin{pmatrix} \underline{c}_{11}^T \underline{x}_{1_k} \\ \underline{c}_{22}^T \underline{x}_{2_k} \\ \vdots \\ \underline{c}_{mm}^T \underline{x}_{m_k} \end{pmatrix} \qquad (3.1\text{-}11)$$

in die Gleichung (3.1-8) eingesetzt, die Gleichung

$$\underline{x}_{i_{k+1}} = \underline{K}_i \underline{x}_{i_k} + \underline{T}_i \underline{y}_{c_k} + \sum_{j=1}^{r} \underline{b}_{ij} u_{j_k} \quad , \quad i = 1, 2, ..., m \qquad (3.1\text{-}12)$$

ergibt. In der Gleichung (3.1-12) soll jetzt der zweite Term umgeformt werden. Die i-te Ausgangsgröße y_{i_k} des Ausgangsvektors $\underline{y}_k$ laut Definition (2.1-13) kann mit Hilfe der Ausgangsgleichung (2.1-2) und den Definitionen (2.1-7) bis (2.1-10) durch Gleichung

$$y_{i_k} = \sum_{j=1}^{i} \underline{c}_{ij}^T \underline{x}_j \quad , \quad i = 1, 2, ..., m \tag{3.1-13}$$

dargestellt werden.
Der Vektor $\underline{c}_{ij}^T$ wird in Gleichung (3.1-13) durch $\underline{c}_{ij}^T = \underline{c}_{jj}^T \; c_{ij}$ substituiert. Das Element c_{ij} ist laut Gleichung (2.1-10) ausschließlich für alle $i < j$ definiert. Für $i = j$ wird $c_{ij} = 1$ gesetzt. Die mathematische Beschreibung der Ausgangsgröße

$$y_{i_k} = \sum_{j=1}^{i} \underline{c}_{jj}^T \, c_{ij} \, \underline{x}_j \quad , \quad c_{i,j=i} = 1 \quad , \quad i = 1, 2, ..., m \tag{3.1-14}$$

wird über alle Ausgangsgrößen y_{i_k} zum Ausgangsvektor

$$\underline{y}_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & \dots & c_{m,m-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{c}_{11}^T \underline{x}_{1_k} \\ \underline{c}_{22}^T \underline{x}_{2_k} \\ \vdots \\ \underline{c}_{mm}^T \underline{x}_{m_k} \end{pmatrix} \tag{3.1-15}$$

zusammengefaßt.
Vergleicht man Gleichung (3.1-15) mit Definition (3.1-11) und der folgenden Definition der (m, m)- Matrix $\underline{S}$ der Form

$$\underline{S} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & \dots & c_{m,m-1} & 1 \end{pmatrix} \quad , \tag{3.1-16}$$

so folgt für den Ausgangsvektor die Gleichung

$$\underline{y}_k = \underline{S} \, \underline{y}_{c_k} \quad . \tag{3.1-17}$$

Da für die Matrix $\underline{S}$ durch die besondere Form gemäß Gleichung (3.1-16) gilt, daß $\det \underline{S} = 1$ ist, folgt, daß die Inverse $\underline{S}^{-1}$ existiert, so daß Gleichung (3.1-17) immer nach dem Vektor

$$\underline{y}_{c_k} = \underline{S}^{-1} \, \underline{y}_k \tag{3.1-18}$$

aufgelöst werden kann.
Für die Zustandsdifferenzengleichung (3.1-12) folgt mit Gleichung (3.1-18) die Gleichung

$$\underline{x}_{i_{k+1}} = \underline{K}_i \underline{x}_{i_k} + \underline{T}_i \underline{S}^{-1} \underline{y}_k + \sum_{j=1}^{r} \underline{b}_{ij} u_{j_k} \quad , \quad i = 1, 2, ..., m \quad , \quad (3.1\text{–}19)$$

wobei das Produkt der Matrizen durch die Definition

$$\left[\underline{d}_{i1} ... \underline{d}_{im}\right] := \underline{T}_i \underline{S}^{-1} \quad , \quad i = 1, 2, ..., m \quad (3.1\text{–}20)$$

folgendermaßen ersetzt werden kann:

$$\underline{x}_{i_{k+1}} = \underline{K}_i \underline{x}_{i_k} + \sum_{j=1}^{m} \underline{d}_{ij} y_{j_k} + \sum_{j=1}^{r} \underline{b}_{ij} u_{j_k} \quad , \quad i = 1, 2, ..., m \quad . \quad (3.1\text{–}21)$$

Mit der Gleichung (3.1-21) ist die Umformung der Zustandsdifferenzengleichung eines Untersystems abgeschlossen.
Zur weiteren Verwendung wird die Differenzengleichung (3.1-21) über alle Untersysteme zu der Gleichung

$$\begin{pmatrix} \underline{x}_{1_{k+1}} \\ \vdots \\ \underline{x}_{m_{k+1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{K}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \underline{K}_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{x}_{1_k} \\ \vdots \\ \underline{x}_{m_k} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{d}_{11} & \cdots & \underline{d}_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \underline{d}_{m1} & \cdots & \underline{d}_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1_k} \\ \vdots \\ y_{m_k} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{b}_{11} & \cdots & \underline{b}_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \underline{b}_{m1} & \cdots & \underline{b}_{mr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1_k} \\ \vdots \\ u_{r_k} \end{pmatrix} \quad (3.1\text{–}22)$$

zusammengefaßt.

3.2 Parametrisierte Struktur des Beobachters für das i-te Untersystem

Zur Ableitung der parametrisierten Struktur wird zunächst die Lösung

$$\underline{x}_{i_k} = \underline{K}_i^k \underline{x}_{i_0} + \sum_{l=0}^{k-1} \underline{K}_i^{k-l-1} \left[\sum_{j=1}^{m} \underline{d}_{ij} y_{j_l} + \sum_{j=1}^{r} \underline{b}_{ij} u_{j_l} \right] \quad , \quad i = 1, 2, ..., m \qquad (3.2\text{–}1)$$

der Zustandsdifferenzengleichung für das i-te Untersystem (3.1-21) angegeben. Durch die folgende Umformung der Gleichung (3.2-1)

$$\underline{x}_{i_k} = \underline{K}_i^k \underline{x}_{i_0} + \sum_{l=0}^{k-1} \underline{K}_i^{k-l-1} \left[\underline{d}_{i1} y_{1_l} + \underline{d}_{i2} y_{2_l} + ... + \underline{d}_{im} y_{m_l} \right] + \sum_{l=0}^{k-1} \underline{K}_i^{k-l-1} \left[\underline{b}_{i1} u_{1_l} + \underline{b}_{i2} u_{2_l} + ... + \underline{b}_{ir} u_{r_l} \right] \quad , \quad i = 1, 2, ..., m \qquad (3.2\text{–}2)$$

kann mit der Definition der (n_i, n_i) -Matrizen

$$\underline{P}_{ij_k} := \sum_{l=0}^{k-1} \underline{K}_i^{k-l-1} y_{j_l} \quad , \quad i, j = 1, 2, ..., m \qquad (3.2\text{–}3)$$

und

$$\underline{Q}_{ij_k} := \sum_{l=0}^{k-1} \underline{K}_i^{k-l-1} u_{j_l} \quad , \quad i = 1, 2, ..., m \quad , \quad j = 1, 2, ..., r \qquad (3.2\text{–}4)$$

die Gleichung (3.2-2) durch die Gleichung

$$\underline{x}_{i_k} = \underline{K}_i^k \underline{x}_{i_0} + \underline{P}_{i1_k} \underline{d}_{i1} + ... + \underline{P}_{im_k} \underline{d}_{im} + \underline{Q}_{i1_k} \underline{b}_{i1} + ... + \underline{Q}_{ir_k} \underline{b}_{ir} \quad , \quad i = 1, 2, ..., m \qquad (3.2\text{–}5)$$

ersetzt werden.
Eine Zusammenfassung der Summanden in Gleichung (3.2-5) ergibt die Beziehung

$$\underline{x}_{i_k} = \underline{K}_i^k \underline{x}_{i_0} + \sum_{j=1}^{m} \underline{P}_{ij_k} \underline{d}_{ij} + \sum_{j=1}^{r} \underline{Q}_{ij_k} \underline{b}_{ij} \quad , \quad i = 1, 2, ..., m \quad , \qquad (3.2\text{–}6)$$

die die parametrisierte Struktur eines Untersystems darstellt.
Betrachtet man weiter die Definitionen (3.2-3) und (3.2-4), so stellen diese die Lösungen der Differenzengleichungen

$$\underline{P}_{ij_{k+1}} = \underline{K}_i \, \underline{P}_{ij_k} + \underline{I} \, y_{j_k} \quad , \quad i,j = 1,2,...,m \, , \tag{3.2-7}$$

$$\underline{P}_{ij_0} = \underline{0} \tag{3.2-8}$$

und

$$\underline{Q}_{ij_{k+1}} = \underline{K}_i \, \underline{Q}_{ij_k} + \underline{I} \, u_{j_k} \, , \quad i = 1,2,...,m \, , \quad j = 1,2,...,r \, , \tag{3.2-9}$$

$$\underline{Q}_{ij_0} = \underline{0} \tag{3.2-10}$$

dar.
Sämtliche Ein- und Ausgangsgrößen des Mehrgrößensystems sind Eingangsgrößen der dynamischen Systeme gemäß den Gleichungen (3.2-7) und (3.2-9). Zur Rekonstruktion des Zustandes eines i-ten Teilsystems wird dann die Gleichung (3.2-6) realisiert. Zur Verdeutlichung wird das folgende Strukturdiagramm

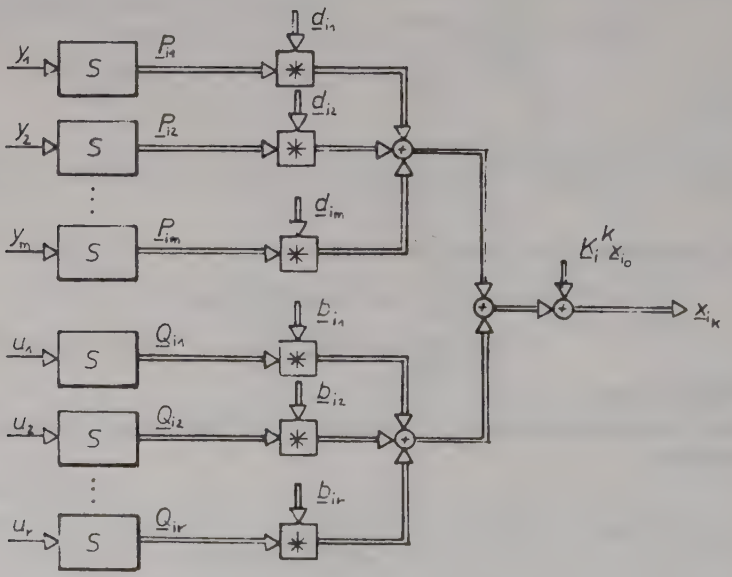

Bild 3.2.a: Parametrisierter Struktur des Beobachters für das i-te Untersystem.

angegeben.
Die parametrisierte Struktur wurde aus dem Mehrgrößensystem abgeleitet. Parameter und Systemzustände sind daher identisch mit den Parametern und Zuständen des Mehrgrößensystems. Das heißt, der Anfangszustand des hier gezeigten parametrisierten Kalman-Beobachters unterscheidet sich nicht vom Anfangszustand des Systems. Die Zustandsverläufe sind somit identisch.
Für die Realisierung der Differenzengleichungen für die $\underline{P}_{ij_k}$ und $\underline{Q}_{ij_k}$ eines Untersystems werden $[n_i^2(m+r)]$ Differenzengleichungen benötigt.

3.3 Vereinfachung der parametrisierten Darstellung

Um die Anzahl der nachzubildenden Differenzengleichungen von $\underline{P}_{ij}$ und $\underline{Q}_{ij}$ zu reduzieren, werden die (n_i, n_i)-Matrizen

$$\underline{P}_{ij_k} =: \left(\underline{p}_{ij_1}\, \underline{p}_{ij_2} \cdots \underline{p}_{ij_{n_i}} \right)_k \quad , \quad i,j = 1,2,...,m \tag{3.3-1}$$

und

$$\underline{Q}_{ij_k} =: \left(\underline{q}_{ij_1}\, \underline{q}_{ij_2} \cdots \underline{q}_{ij_{n_i}} \right)_k \quad , \quad i = 1,2,...,m \quad , \quad j = 1,2,...,r \tag{3.3-2}$$

in Spaltenvektoren zerlegt. Die Differenzengleichungen (3.2-7) und (3.2-9) werden, unter Verwendung der Anfangsbedingungen, Z-transformiert und mit den Definitionen (3.3-1) und (3.3-2) verglichen :

$$\underline{P}_{ij}(z) = \left(\underline{p}_{ij_1}(z)\, \underline{p}_{ij_2}(z) \cdots \underline{p}_{ij_{n_i}}(z) \right) = [z\underline{I} - \underline{K}_i]^{-1} \underline{I} y_j(z) \,, \tag{3.3-3}$$

$$\underline{Q}_{ij}(z) = \left(\underline{q}_{ij_1}(z)\, \underline{q}_{ij_2}(z) \cdots \underline{q}_{ij_{n_i}}(z) \right) = [z\underline{I} - \underline{K}_i]^{-1} \underline{I} u_j(z) \,. \tag{3.3-4}$$

Durch die Definition des n_i - dimensionalen Vektors

$$\underline{e}_\nu := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \nu\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \tag{3.3-5}$$

lassen sich die Spaltenvektoren in den Gleichungen (3.3-3) und (3.3-4) durch die Gleichungen

$$\underline{p}_{ij_\nu}(z) = [z\underline{I} - \underline{K}_i]^{-1} \underline{e}_\nu y_j(z) \quad , \quad \nu = 1,2,...,n_i \tag{3.3-6}$$

und

$$\underline{q}_{ij_\nu}(z) = [z\underline{I} - \underline{K}_i]^{-1} \underline{e}_\nu u_j(z) \quad , \quad \nu = 1,2,...,n_i \tag{3.3-7}$$

angeben. Zur weiteren Ableitung werden nun zwei Lemmata eingeführt:

LEMMA 3.3.A. : *Wenn die (n_i, n_i) - Matrix $\underline{F}$ in Identifikationsnormalform vorliegt, dann gilt*

$$[z\underline{I} - \underline{F}^T]^{-1}\underline{e}_1 = \frac{1}{det[z\underline{I} - \underline{F}]} \begin{pmatrix} z^{n_i-1} \\ z^{n_i-2} \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} . \qquad (3.3\text{-}8)$$

BEWEIS: Durch Definition der Matrix

$$\underline{F} = \begin{pmatrix} f_{n_i-1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ f_{n_i-2} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ f_1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ f_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \qquad (3.3\text{-}9)$$

in Identifikationsnormalform kann man die linke Seite von Gleichung (3.3-8) durch

$$\begin{pmatrix} z - f_{n_i-1} & -f_{n_i-2} & \dots & -f_1 & -f_0 \\ -1 & z & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & z \end{pmatrix}^{-1} \underline{e}_1 =$$

$$\frac{1}{det[z\underline{I} - \underline{F}]} \begin{pmatrix} z^{n_i-1} \\ z^{n_i-2} \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (3.3\text{-}10)$$

darstellen. Die inverse Matrix in Gleichung (3.3-10) kann durch ihre Determinante und Adjunkten A_{ij} folgendermaßen

$$\frac{1}{det[z\underline{I} - \underline{F}^T]} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n_i} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n_i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n_i1} & A_{n_i2} & \cdots & A_{n_in_i} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{det[z\underline{I} - \underline{F}]} \begin{pmatrix} z^{n_i-1} \\ z^{n_i-2} \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3.3-11}$$

substituiert werden.
Mit der bekannten Beziehung $det(z\underline{I} - \underline{F}^T) = det(z\underline{I} - \underline{F})$ folgt aus Gleichung (3.3-11) die Gleichung

$$\frac{1}{det[z\underline{I} - \underline{F}]} \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{12} \\ \vdots \\ A_{1n_i} \end{pmatrix} = \frac{1}{det[z\underline{I} - \underline{F}]} \begin{pmatrix} z^{n_i-1} \\ z^{n_i-2} \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} . \tag{3.3-12}$$

Die Identität von Lemma 3.3.A kann durch die Berechnung der Adjunkten $A_{11}, A_{12}, ..., A_{1n_i}$ gezeigt werden. ∎

LEMMA 3.3.B. *Wenn die (n_i, n_i)-Matrix $\underline{F}$ in Identifikationsnormalform vorliegt, dann ist*

$$[z\underline{I} - \underline{F}]^{-1}\underline{e}_\nu = \underline{G}_\nu[z\underline{I} - \underline{F}^T]^{-1}\underline{e}_1 \quad , \quad \nu = 1, 2, ..., n_i \quad . \qquad (3.3\text{–}13)$$

BEWEIS: Wenn die Identität gezeigt ist, können die unbekannten Matrizen $\underline{G}_\nu$ aus der Gleichung (3.3-13) berechnet werden .
Zum Beweis der Identität von Gleichung (3.3-13) wird die inverse Matrix $(z\underline{I} - \underline{F})^{-1}$ in Gleichung (3.3-13) durch ihre Determinante und Adjunkten entsprechend

$$\frac{1}{det[z\underline{I} - \underline{F}]} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n_i} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n_i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n_i1} & A_{n_i2} & \dots & A_{n_in_i} \end{pmatrix}^T \underline{e}_\nu = \underline{G}_\nu[z\underline{I} - \underline{F}^T]^{-1}\underline{e}_1 \quad ,$$

$$\nu = 1, 2, ..., n_i \qquad (3.3\text{–}14)$$

substituiert. Die Elemente des n_i -dimemsionalen Vektors

$$\underline{adj_\nu} := \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n_i} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n_i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n_i1} & A_{n_i2} & \dots & A_{n_in_i} \end{pmatrix}^T \underline{e}_\nu \quad , \quad \nu = 1, 2, ..., n_i \qquad (3.3\text{–}15)$$

bestehen aus Polynomen $(n_i - 1)$-Ordnung in z , so daß ein Vektor $\underline{adj_\nu}$ durch das Produkt

$$\underline{adj_\nu} = \underline{G}_\nu \begin{pmatrix} z^{n_i-1} \\ z^{n_i-2} \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \nu = 1, 2, ..., n_i \qquad (3.3\text{–}16)$$

dargestellt werden kann.
Wird die Gleichung (3.3-16) in die Gleichung (3.3-14) eingesetzt, wobei die Definition (3.3-15) verwendet wird, so folgt die Gleichung

$$\frac{\underline{G}_\nu}{det[z\underline{I}-\underline{F}]}\begin{pmatrix} z^{n_i-1} \\ z^{n_i-2} \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{G}_\nu[z\underline{I}-\underline{F}^T]^{-1}\underline{e}_1 \quad , \quad \nu = 1,2,...,n_i \quad , \tag{3.3-17}$$

die mit Lemma 3.3.A die Identität von Gleichung (3.3-13)

$$[z\underline{I}-\underline{F}]^{-1}\underline{e}_\nu = \underline{G}_\nu[z\underline{I}-\underline{F}^T]^{-1}\underline{e}_1 \quad , \quad \nu = 1,2,...,n_i \tag{3.3-18}$$

zeigt. ∎

Nach diesen Hilfssätzen werden die dynamischen Systeme mit den Beschreibungen

$$\underline{v}_{ij}(z) := [z\underline{I} - \underline{K}_i^T]^{-1}\underline{e}_1 y_j(z) \quad , \quad i,j = 1,2,...,m \quad , \tag{3.3-19}$$

mit $\underline{v}_{ij} \in R^{n_i}$, und

$$\underline{w}_{ij}(z) := [z\underline{I} - \underline{K}_i^T]^{-1}\underline{e}_1 u_j(z) \quad , \quad i = 1,2,...,m \quad , \quad j = 1,2,...,r \quad , \tag{3.3-20}$$

mit $\underline{w}_{ij} \in R^{n_i}$, eingeführt.
Ein Vergleich von Gleichung (3.3-6) mit Definition (3.3-19) und Gleichung (3.3-7) mit Definition (3.3-20) ermöglicht mit Lemma 3.3.B die Transformationen

$$\underline{p}_{ij\nu_k} = \underline{E}_{i\nu}\underline{v}_{ij_k} \quad , \quad i,j = 1,2,...,m \tag{3.3-21}$$

und

$$\underline{q}_{ij\nu_k} = \underline{E}_{i\nu}\underline{w}_{ij_k} \quad , \quad i = 1,2,...,m \quad , \quad j = 1,2,...,r \tag{3.3-22}$$

für $\nu = 1,2,...,n_i$.
Die Transformationsmatrizen $\underline{E}_{i\nu}$ werden aus Lemma 3.3.B mit

$$adj[z\underline{I} - \underline{K}_i]\underline{e}_\nu = \underline{E}_{i\nu}\begin{pmatrix} z^{n_i-1} \\ z^{n_i-2} \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3.3-23}$$

für $i = 1,2,...,m$ und $\nu = 1,2,...,n_i$ berechnet.
Um die parametrisierte vereinfachte Struktur zu bilden, werden die Gleichungen (3.3-19) und (3.3-20) der dynamischen Systeme in den Zeitbereich zurücktransformiert. Die $(n_i^2(m+r))$ Differenzengleichungen (3.2-7) bis (3.2-10) werden durch die $(n_i(m+r))$ Differenzengleichungen

$$\underline{v}_{ij_{k+1}} = \underline{K}_i^T\underline{v}_{ij_k} + \underline{e}_1 y_{j_k} \quad , \quad i,j = 1,2,...,m \quad , \tag{3.3-24}$$

$$\underline{v}_{ij_{k=0}} = \underline{0} \quad , \tag{3.3-25}$$

$$\underline{w}_{ij_{k+1}} = \underline{K}_i^T\underline{w}_{ij_k} + \underline{e}_1 u_{j_k} \, , \quad i = 1,2,...,m \, , \, j = 1,2,...,r \tag{3.3-26}$$

$$\underline{w}_{ij_{k=0}} = \underline{0} \tag{3.3-27}$$

und die Transformationsgleichungen (3.3-21) und (3.3-22) ersetzt. Das folgende Strukturbild zeigt die vereinfachte parametrisierte Struktur des Beobachters für das i-te Untersystem.

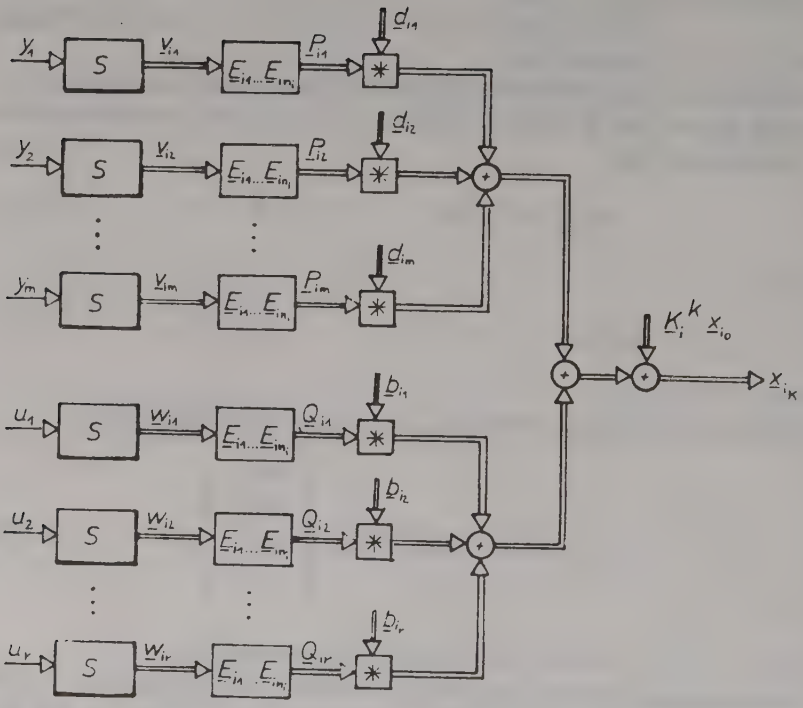

Bild 3.3 : Strukturbild des parametrisierten Beobachters für das i-te Untersystem nach der Reduzierung der nachzubildenden Differenzengleichungen.

3.4 Beschreibung der Ausgangsgrösse für die parametrisierte Form des Beobachters

Bei der späteren Parameteradaption werden die Ausgänge des Beobachters und die Ausgänge des Mehrgrößensystems miteinander verglichen. Hierzu wird die vereinfachte parametrisierte Struktur um die Beschreibung der Ausgangsgröße erweitert.
Zunächst wird die Ausgangsgleichung laut Gleichung (3.1-18)

$$\underline{y}_{c_k} = \underline{S}^{-1}\underline{y}_k \tag{3.4-1}$$

betrachtet. Die Form der Matrix $\underline{S}$ laut Definition (3.1-16) bleibt auch nach der Inversion erhalten, so daß die folgende Definition

$$\underline{S}^{-1} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ s_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ s_{31} & s_{32} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ s_{m1} & s_{m2} & s_{m3} & \dots & s_{m,m-1} & 1 \end{pmatrix} \tag{3.4-2}$$

möglich wird .
Das i-te Element des Vektors y_{c_k} laut Gleichung (3.4-1) kann mit Definition (2.1-13) durch die Gleichung

$$y_{ic_k} = y_{i_k} + \sum_{\substack{j=1 \\ j<i}}^{i-1} s_{ij} y_{j_k} \quad , \quad i = 1, 2, \dots, m \tag{3.4-3}$$

angegeben werden. Die Ausgangsgröße y_{ic_k} kann gemäß Gleichung (3.1-11) ersetzt werden. Durch Auflösung nach

$$y_{i_k} = \underline{c}_{ii}^T \underline{x}_{i_k} - \sum_{\substack{j=1 \\ j<i}}^{i-1} s_{ij} y_{j_k} \quad , \quad i = 1, 2, \dots, m \tag{3.4-4}$$

folgt weiter, durch Substitution von $\underline{x}_{i_k}$ entsprechend Gleichung (3.2-6), die Gleichung

$$y_{i_k} = \underline{c}_{ii}^T \underline{K}_i^k \underline{x}_{i_o} + \sum_{j=1}^{m} \underline{c}_{ii}^T \underline{P}_{ij_k} \underline{d}_{ij} + \sum_{j=1}^{r} \underline{c}_{ii}^T \underline{Q}_{ij_k} \underline{b}_{ij} - \sum_{\substack{j=1 \\ j<i}}^{i-1} s_{ij} y_{j_k} \quad , \quad i = 1, 2, \dots, m \quad . \tag{3.4-5}$$

Zur weiteren Ableitung wird folgendes Lemma 3.4.A eingeführt:

LEMMA 3.4.A. : *Für die Vektoren* $\underline{v}_{ij}$ *und* $\underline{w}_{ij}$ *gelten die Gleichungen*

$$\underline{v}_{ij_k}^T = \underline{c}_{ii}^T \underline{P}_{ij_k} \quad , \quad i,j = 1,2,...,m \tag{3.4-6}$$

und

$$\underline{w}_{ij_k}^T = \underline{c}_{ii}^T \underline{Q}_{ij_k} \quad , \quad i = 1,2,...,m \quad , \quad j = 1,2,...,r \, . \tag{3.4-7}$$

BEWEIS: Die Vektoren $\underline{v}_{ij_k}$ und $\underline{w}_{ij_k}$ werden durch die Definitionen (3.3-19) und (3.3-20) in den Gleichungen (3.4-6) und (3.4-7) ersetzt. Hieraus folgen weiter durch Substitution der Matrizen $\underline{P}_{ij_k}$ und $\underline{Q}_{ij_k}$ mit den Gleichungen (3.3-3) und (3.3-4) die Beziehungen

$$[(z\underline{I} - \underline{K}_i^T)^{-1} \underline{e}_1 y_j(z)]^T = \underline{c}_{ii}^T (z\underline{I} - \underline{K}_i)^{-1} y_j(z) \tag{3.4-8}$$

für $i,j = 1,2,...,m$ und

$$[(z\underline{I} - \underline{K}_i^T)^{-1} \underline{e}_1 u_j(z)]^T = \underline{c}_{ii}^T (z\underline{I} - \underline{K}_i)^{-1} u_j(z) \tag{3.4-9}$$

für $i = 1,2,...,m$ und $j = 1,2,...,r$. Mit der Definition (2.1-8) und der bekannten Beziehung $(\underline{A}^{-1})^T = (\underline{A}^T)^{-1}$, ist die Identität der Gleichungen (3.4-6) und (3.4-7) gezeigt. ∎

Mit Lemma 3.4.A kann die Gleichung (3.4-5) durch

$$y_{i_k} = \underline{c}_{ii}^T \underline{K}_i^k \underline{x}_{i_0} + \sum_{j=1}^{m} \underline{v}_{ij_k}^T \underline{d}_{ij} + \sum_{j=1}^{r} \underline{w}_{ij_k}^T \underline{b}_{ij} - \sum_{\substack{j=1 \\ j<i}}^{i-1} s_{ij} y_{j_k} \quad , \quad i = 1,2,...,m \tag{3.4-10}$$

dargestellt werden.
Um die Übersicht zu erhöhen und den folgenden Schreibaufwand zu reduzieren, wird die Gleichung (3.4-10) zur folgenden Darstellung zusammengefaßt:

$$y_{i_k} = f_{i_k} + \underline{z}_{i_k}^T \underline{\alpha}_i \quad , \quad i = 1,2,...,m \quad , \tag{3.4-11}$$

$$f_{i_k} := \underline{c}_{ii}^T \underline{K}_i^k \underline{x}_{i_0} \quad , \tag{3.4-12}$$

$$\underline{z}_{i_k}^T := \left(y_1 \ \cdots \ y_{i-1} \quad \underline{v}_{i1}^T \ \cdots \ \underline{v}_{im}^T \quad \underline{w}_{i1}^T \ \cdots \ \underline{w}_{ir}^T \right)_k \quad , \tag{3.4-13}$$

$$\underline{\alpha}_i^T := \left(-s_{i1} \ \cdots \ -s_{i,i-1} \quad \underline{d}_{i1}^T \ \cdots \ \underline{d}_{im}^T \quad \underline{b}_{i1}^T \ \cdots \ \underline{b}_{ir}^T \right) . \tag{3.4-14}$$

Der Parametervektor $\underline{\alpha}_i$ und der Vektor $\underline{z}_i$ haben dabei die Dimension $q_i := (m+r)n_i + i - 1$.

Mit dieser konzentrierten Darstellung wird die Ableitung der zeitdiskreten parametrisierten Struktur des Beobachters beendet.
Das folgende Beispiel verdeutlicht die parametrisierte Struktur des Beobachters für ein Mehrgrößensystem siebter Ordnung mit zwei Eingängen und drei Ausgängen.

3.5 Verdeutlichung des parametrisierten Mehrgrössenbeobachters an einem Beispiel

In diesem Abschnitt wird der parametrisierte Kalman-Beobachter an einem beobachtbaren Mehrgrößensystem verdeutlicht.

Hierzu sei ein beobachtbares Mehrgrößensystem siebter Ordnung mit zwei Eingängen und drei Ausgängen in der Zustandsbeschreibung

$$\underline{x}'_{k+1} = \underline{A}' \underline{x}'_k + \underline{B}' \underline{u}_k \quad , \quad \underline{x}' \in R^n, \underline{u} \in R^r \tag{3.5-1}$$

$$\underline{y}_k = \underline{C}' \underline{x}'_k \quad , \quad \underline{y} \in R^m \tag{3.5-2}$$

mit r=2 und m=3 gegeben. Durch die Kenntnis der Matrizen $\underline{A}'$, $\underline{B}'$, $\underline{C}'$ konnten die Beobachtbarkeitsindices entsprechend

$$\begin{aligned} n_1 &= 3 \quad , \\ n_2 &= 2 \quad , \\ n_3 &= 2 \end{aligned} \tag{3.5-3}$$

vorgegeben werden.
Zusätzlich sei das Fehlerverhalten des Beobachters durch die Matrizen $\underline{K}_i$ mit den Vektoren $\underline{k}_{ii}$ für $i = 1, 2, 3$ vorgegeben.

Zur Ableitung der parametrisierten Form des Kalman-Beobachters wird das System mit der Beschreibung (3.5-1) und (3.5-2) auf Identifikationsnormalform

$$
\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ -- \\ x_{21} \\ x_{22} \\ -- \\ x_{31} \\ x_{32} \end{pmatrix}_{k+1}
=
\left(\begin{array}{ccc|cc|cc}
a_{11_1} & 1 & 0 & a_{12_1} & 0 & a_{13_1} & 0 \\
a_{11_2} & 0 & 1 & a_{12_2} & 0 & a_{13_2} & 0 \\
a_{11_3} & 0 & 0 & a_{12_3} & 0 & a_{13_3} & 0 \\
-- & -- & -- & -- & -- & -- & -- \\
a_{21_1} & 0 & 0 & a_{22_1} & 1 & a_{23_1} & 0 \\
a_{21_2} & 0 & 0 & a_{22_1} & 0 & a_{23_2} & 0 \\
-- & -- & -- & -- & -- & -- & -- \\
a_{31_1} & 0 & 0 & a_{32_1} & 0 & a_{33_1} & 1 \\
a_{31_2} & 0 & 0 & a_{32_2} & 0 & a_{33_2} & 0
\end{array}\right)
\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ -- \\ x_{21} \\ x_{22} \\ -- \\ x_{31} \\ x_{32} \end{pmatrix}_{k}
$$

$$
+
\left(\begin{array}{c|c}
b_{11_1} & b_{12_1} \\
b_{11_2} & b_{12_2} \\
b_{11_3} & b_{12_3} \\
-- & -- \\
b_{21_1} & b_{22_1} \\
b_{21_2} & b_{22_2} \\
-- & -- \\
b_{31_1} & b_{32_1} \\
b_{31_2} & b_{32_2}
\end{array}\right)
\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}_k
\tag{3.5-4}
$$

$$
\begin{pmatrix} y_1 \\ - \\ y_2 \\ - \\ y_3 \end{pmatrix}_k
=
\left(\begin{array}{ccc|cc|cc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
- & - & - & - & - & - & - \\
c_{21} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
- & - & - & - & - & - & - \\
c_{31} & 0 & 0 & c_{32} & 0 & 1 & 0
\end{array}\right)
\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ -- \\ x_{21} \\ x_{22} \\ -- \\ x_{31} \\ x_{32} \end{pmatrix}_k
\tag{3.5-5}
$$

transformiert.
Um die parametrisierte Struktur angeben zu können, werden zunächst die Parametervektoren

$$
\begin{aligned}
\underline{\alpha}_1^T &:= \left(\underline{d}_{11}^T \;\; \underline{d}_{12}^T \;\; \underline{d}_{13}^T \;\; \underline{b}_{11}^T \;\; \underline{b}_{12}^T \right), \\
\underline{\alpha}_2^T &:= \left(-s_{21} \;\; \underline{d}_{21}^T \;\; \underline{d}_{22}^T \;\; \underline{d}_{23}^T \;\; \underline{b}_{21}^T \;\; \underline{b}_{22}^T \right), \\
\underline{\alpha}_3^T &:= \left(-s_{31} \;\; -s_{32} \;\; \underline{d}_{31}^T \;\; \underline{d}_{32}^T \;\; \underline{d}_{33}^T \;\; \underline{b}_{31}^T \;\; \underline{b}_{32}^T \right)
\end{aligned}
\tag{3.5-6}
$$

aus der Definition (3.4-14) für $i = 1,2,3$ bestimmt. Zur Bestimmung der Parameter s_{21}, s_{31} und s_{32} wird die Matrix

$$\underline{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c_{21} & 1 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & 1 \end{pmatrix} \tag{3.5-7}$$

gemäß der Definition (3.1-16) mit Hilfe der bekannten Parameter in der Ausgangsmatrix $\underline{C}$ der Zustandsbeschreibung (3.5-4) und (3.5-5) gebildet. Die Inversion der Matrix $\underline{S}$ ergibt die Matrix

$$\underline{S}^{-1} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ s_{21} & 1 & 0 \\ s_{31} & s_{32} & 1 \end{pmatrix} \tag{3.5-8}$$

mit den gesuchten Parametern s_{21}, s_{31} und s_{32} .
Die Parametervektoren $\underline{b}_{i1}$ und $\underline{b}_{i2}$ für $i = 1,2,3$ können direkt aus der Eingangsmatrix der Zustandsbeschreibung (3.5-4) und (3.5-5) abgelesen werden.
Zur Bestimmmung der Vektoren $\underline{d}_{i1}, \underline{d}_{i2}, \underline{d}_{i3}$ für $i = 1,2,3$ werden die Matrizen

$$\underline{T}_1 = \left((\underline{a}_{11} - \underline{k}_{11})\ \underline{a}_{12}\ \underline{a}_{13} \right) , \tag{3.5-9}$$

$$\underline{T}_2 = \left(\underline{a}_{21}\ (\underline{a}_{22} - \underline{k}_{22})\ \underline{a}_{23} \right) , \tag{3.5-10}$$

$$\underline{T}_3 = \left(\underline{a}_{31}\ \underline{a}_{32}\ (\underline{a}_{33} - \underline{k}_{33}) \right) \tag{3.5-11}$$

aus den Parametern $\underline{a}_{ij}$ der Systemmatrix der Zustandsbeschreibung (3.5-4) und (3.5-5) und den Parametern $\underline{k}_{ii}$ der bekannten Fehlermatrizen $\underline{K}_1, \underline{K}_2$ und $\underline{K}_3$ des Beobachters gebildet.
Die gesuchten Parametervektoren ergeben sich nun mit der Definition (3.1-20) aus

$$\left[\underline{d}_{11} \underline{d}_{12} \underline{d}_{13} \right] = \underline{T}_1 \underline{S}^{-1} , \tag{3.5-12}$$

$$\left[\underline{d}_{21} \underline{d}_{22} \underline{d}_{23} \right] = \underline{T}_2 \underline{S}^{-1} , \tag{3.5-13}$$

$$\left[\underline{d}_{31} \underline{d}_{32} \underline{d}_{33} \right] = \underline{T}_3 \underline{S}^{-1} . \tag{3.5-14}$$

Hiermit ist die Berechnung der Parametervektoren $\underline{\alpha}_1, \underline{\alpha}_2$ und $\underline{\alpha}_3$ abgeschlossen.

Im zweiten Teil wird der Algorithmus des parametrisierten Beobachters zusammengestellt.

Die Eingangsgrößen u_1 und u_2 und die Ausgangsgrößen y_1, y_2 und y_3 des Mehrgrößensystems werden als Eingangsgrößen auf die dynamischen Systeme $\underline{v}_{ij}$ für $i, j = 1, 2, 3$ und $\underline{w}_{ij}$ für i=1,2,3 und j=1,2 mit den Beschreibungen

$$\underline{v}_{11_{k+1}} = \underline{K}_1^T \underline{v}_{11_k} + \underline{e}_1 y_{1_k} \quad , \quad \underline{v}_{11_{k=0}} = \underline{0} \quad , \qquad (3.5\text{–}15)$$

$$\underline{v}_{12_{k+1}} = \underline{K}_1^T \underline{v}_{12_k} + \underline{e}_1 y_{2_k} \quad , \quad \underline{v}_{12_{k=0}} = \underline{0} \quad , \qquad (3.5\text{–}16)$$

$$\underline{v}_{13_{k+1}} = \underline{K}_1^T \underline{v}_{13_k} + \underline{e}_1 y_{3_k} \quad , \quad \underline{v}_{13_{k=0}} = \underline{0} \quad , \qquad (3.5\text{–}17)$$

$$\underline{w}_{11_{k+1}} = \underline{K}_1^T \underline{w}_{11_k} + \underline{e}_1 u_{1_k} \quad , \quad \underline{w}_{11_{k=0}} = \underline{0} \quad , \qquad (3.5\text{–}18)$$

$$\underline{w}_{12_{k+1}} = \underline{K}_1^T \underline{w}_{12_k} + \underline{e}_1 u_{2_k} \quad , \quad \underline{w}_{12_{k=0}} = \underline{0} \quad , \qquad (3.5\text{–}19)$$

$$\underline{v}_{21_{k+1}} = \underline{K}_2^T \underline{v}_{21_k} + \underline{e}_1 y_{1_k} \quad , \quad \underline{v}_{21_{k=0}} = \underline{0} \quad , \qquad (3.5\text{–}20)$$

$$\underline{v}_{22_{k+1}} = \underline{K}_2^T \underline{v}_{22_k} + \underline{e}_1 y_{2_k} \quad , \quad \underline{v}_{22_{k=0}} = \underline{0} \quad , \qquad (3.5\text{–}21)$$

$$\underline{v}_{23_{k+1}} = \underline{K}_2^T \underline{v}_{23_k} + \underline{e}_1 y_{3_k} \quad , \quad \underline{v}_{23_{k=0}} = \underline{0} \quad , \qquad (3.5\text{–}22)$$

$$\underline{w}_{21_{k+1}} = \underline{K}_2^T \underline{w}_{21_k} + \underline{e}_1 u_{1_k} \quad , \quad \underline{w}_{21_{k=0}} = \underline{0} \quad , \qquad (3.5\text{–}23)$$

$$\underline{w}_{22_{k+1}} = \underline{K}_2^T \underline{w}_{22_k} + \underline{e}_1 u_{2_k} \quad , \quad \underline{w}_{22_{k=0}} = \underline{0} \quad , \qquad (3.5\text{–}24)$$

$$\underline{v}_{31_{k+1}} = \underline{K}_3^T \underline{v}_{31_k} + \underline{e}_1 y_{1_k} \quad , \quad \underline{v}_{31_{k=0}} = \underline{0} \quad , \qquad (3.5\text{–}25)$$

$$\underline{v}_{32_{k+1}} = \underline{K}_3^T \underline{v}_{32_k} + \underline{e}_1 y_{2_k} \quad , \quad \underline{v}_{32_{k=0}} = \underline{0} \quad , \qquad (3.5\text{–}26)$$

$$\underline{v}_{33_{k+1}} = \underline{K}_3^T \underline{v}_{33_k} + \underline{e}_1 y_{3_k} \quad , \quad \underline{v}_{33_{k=0}} = \underline{0} \quad , \qquad (3.5\text{–}27)$$

$$\underline{w}_{31_{k+1}} = \underline{K}_3^T \underline{w}_{31_k} + \underline{e}_1 u_{1_k} \quad , \quad \underline{w}_{31_{k=0}} = \underline{0} \quad , \qquad (3.5\text{–}28)$$

$$\underline{w}_{32_{k+1}} = \underline{K}_3^T \underline{w}_{32_k} + \underline{e}_1 u_{2_k} \quad , \quad \underline{w}_{32_{k=0}} = \underline{0} \qquad (3.5\text{–}29)$$

gegeben.

Durch die Gleichung (3.3-23) können die Transformationsmatrizen

$$\underline{E}_{11}, \underline{E}_{12}, \underline{E}_{13} \in R^{3x3} , \tag{3.5-30}$$

$$\underline{E}_{21}, \underline{E}_{22} \in R^{2x2} , \tag{3.5-31}$$

$$\underline{E}_{31}, \underline{E}_{32} \in R^{2x2} \tag{3.5-32}$$

nach der Gleichung

$$adj[z\underline{I} - \underline{K}_i]\underline{e}_\nu = \underline{E}_{i\nu} \begin{pmatrix} z^{n_i-1} \\ z^{n_i-2} \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} , \quad i = 1, 2, ..., m \tag{3.5-33}$$

berechnet werden. Mit diesen Matrizen $\underline{E}_{i\nu}$ wird die Transformation der Vektoren $\underline{v}_{ij_k}$ und $\underline{w}_{ij_k}$ auf die Matrizen $\underline{P}_{ij_k}$ und $\underline{Q}_{ij_k}$ durchgeführt. Hierzu werden die Gleichungen (3.3-21), (3.3-22), (3.3-23), (3.3-1) und (3.3-2) folgendermaßen

$$\underline{P}_{11_k} = \left[\underline{E}_{11}\underline{v}_{11_k} \quad \underline{E}_{12}\underline{v}_{11_k} \quad \underline{E}_{13}\underline{v}_{11_k}\right] , \tag{3.5-34}$$

$$\underline{P}_{12_k} = \left[\underline{E}_{11}\underline{v}_{12_k} \quad \underline{E}_{12}\underline{v}_{12_k} \quad \underline{E}_{13}\underline{v}_{12_k}\right] , \tag{3.5-35}$$

$$\underline{P}_{13_k} = \left[\underline{E}_{11}\underline{v}_{13_k} \quad \underline{E}_{12}\underline{v}_{13_k} \quad \underline{E}_{13}\underline{v}_{13_k}\right] , \tag{3.5-36}$$

$$\underline{Q}_{11_k} = \left[\underline{E}_{11}\underline{w}_{11_k} \quad \underline{E}_{12}\underline{w}_{11_k} \quad \underline{E}_{13}\underline{w}_{11_k}\right] , \tag{3.5-37}$$

$$\underline{Q}_{12_k} = \left[\underline{E}_{11}\underline{w}_{12_k} \quad \underline{E}_{12}\underline{w}_{12_k} \quad \underline{E}_{13}\underline{w}_{12_k}\right] , \tag{3.5-38}$$

$$\underline{P}_{21_k} = \left[\underline{E}_{21}\underline{v}_{21_k} \quad \underline{E}_{22}\underline{v}_{21_k}\right] , \tag{3.5-39}$$

$$\underline{P}_{22_k} = \left[\underline{E}_{21}\underline{v}_{22_k} \quad \underline{E}_{22}\underline{v}_{22_k}\right] , \tag{3.5-40}$$

$$\underline{Q}_{21_k} = \left[\underline{E}_{21}\underline{w}_{21_k} \quad \underline{E}_{22}\underline{w}_{21_k}\right] , \tag{3.5-41}$$

$$\underline{Q}_{22_k} = \left[\underline{E}_{21}\underline{w}_{22_k} \quad \underline{E}_{22}\underline{w}_{22_k}\right] , \tag{3.5-42}$$

$$\underline{P}_{31_k} = \left[\underline{E}_{31}\underline{v}_{31_k} \quad \underline{E}_{32}\underline{v}_{31_k}\right] , \tag{3.5-43}$$

$$\underline{P}_{32_k} = \left[\underline{E}_{31}\underline{v}_{32_k} \quad \underline{E}_{32}\underline{v}_{32_k}\right] \quad , \tag{3.5-44}$$

$$\underline{Q}_{31_k} = \left[\underline{E}_{31}\underline{w}_{31_k} \quad \underline{E}_{32}\underline{w}_{31_k}\right] \quad , \tag{3.5-45}$$

$$\underline{Q}_{32_k} = \left[\underline{E}_{31}\underline{w}_{32_k} \quad \underline{E}_{32}\underline{w}_{32_k}\right] \tag{3.5-46}$$

verwendet.
Die Zustände $\underline{\hat{x}}_{i_k}$ des Beobachters ergeben sich unter Verwendung der Anfangszustände $\underline{\hat{x}}_{i_0}$ des Beobachters, der Parameter gemäß den Gleichungen (3.5-6) und der Gleichung (3.2-6) folgendermaßen :

$$\underline{\hat{x}}_{1_k} = \underline{K}_1^k \underline{\hat{x}}_{1_0} + \underline{P}_{11_k}\underline{d}_{11} + \underline{P}_{12_k}\underline{d}_{12} + \underline{P}_{13_k}\underline{d}_{13} + \underline{Q}_{11_k}\underline{b}_{11} + \underline{Q}_{12_k}\underline{b}_{12} \quad , \tag{3.5-47}$$

$$\underline{\hat{x}}_{2_k} = \underline{K}_2^k \underline{\hat{x}}_{2_0} + \underline{P}_{21_k}\underline{d}_{21} + \underline{P}_{22_k}\underline{d}_{22} + \underline{Q}_{21_k}\underline{b}_{21} + \underline{Q}_{22_k}\underline{b}_{22} \quad , \tag{3.5-48}$$

$$\underline{\hat{x}}_{3_k} = \underline{K}_3^k \underline{\hat{x}}_{3_0} + \underline{P}_{31_k}\underline{d}_{31} + \underline{P}_{32_k}\underline{d}_{32} + \underline{Q}_{31_k}\underline{b}_{31} + \underline{Q}_{32_k}\underline{b}_{32} \quad . \tag{3.5-49}$$

Um den Zustandsfehler betrachten zu können, wird für das Mehrgrößensystem die gleiche parametrisierte Form des Kalman-Beobachters mit unterschiedlichen Anfangszuständen $\underline{x}_{i_0}$ angesetzt. Dann ergeben sich dieselben Gleichungen (3.5-48) bis (3.5-53) jedoch ohne Bezeichnung " ˆ " . Die Bildung der Differenz $\underline{\hat{x}}_{i_k} - \underline{x}_{i_k}$ ergibt die Lösung der Fehlerdifferenzengleichung

$$\underline{\hat{x}}_{i_k} - \underline{x}_{i_k} = \underline{K}_i^k \left[\underline{\hat{x}}_{i_0} - \underline{x}_{i_0}\right] \quad , \quad i = 1, 2, ..., m \tag{3.5-50}$$

des Beobachters.
Die Ausgangsgrößen $\hat{y}_{i_k}$ des Beobachters ergeben sich mit der Gleichung (3.4-4) entsprechend der Beziehungen

$$\hat{y}_{1_k} = \underline{c}_{11}^T \underline{\hat{x}}_{1_k} \quad , \tag{3.5-51}$$

$$\hat{y}_{2_k} = \underline{c}_{22}^T \underline{\hat{x}}_{2_k} - s_{21}\, y_{1_k} \quad , \tag{3.5-52}$$

$$\hat{y}_{3_k} = \underline{c}_{33}^T \underline{\hat{x}}_{3_k} - s_{31}\, y_{1_k} - s_{32}\, y_{2_k} \quad . \tag{3.5-53}$$

Der hiermit abgeschlossene Algorithmus des parametrisierten Beobachters wird in dem folgenden Strukturdiagramm nochmals verdeutlicht.

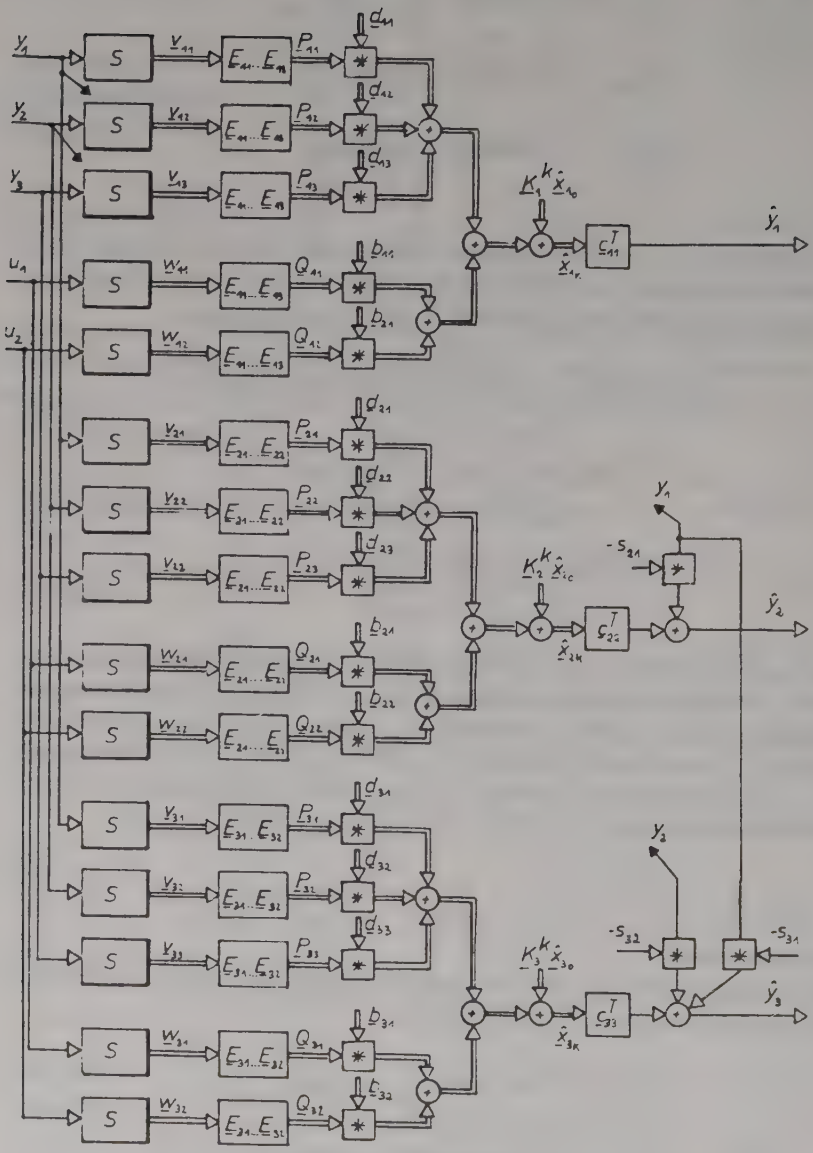

Bild 3.5 : Strukturdiagramm des parametrisierten Beobachters für ein System siebter Ordnung mit zwei Eingängen und drei Ausgängen .

4.0 Parameteradaption

In diesem Kapitel wird die parametrisierte Form des Kalman-Beobachters mit einer überlagerten Parameteradaption zu einem sogenannten adaptiven Beobachter verbunden.
Hierzu wird das beobachtbare System mit der Beschreibung (2.1-1) und (2.1-2) in der parametrisierten Form des Beobachters gemäß den Gleichungen (3.4-11) und (3.4-12) durch die Gleichungen

$$y_{i_k} = f^*_{i_k} + \underline{z}^T_{i_k}\,\underline{\alpha}^*_i \tag{4.0–1}$$

und

$$f^*_{i_k} := \underline{c}^T_{i_i}\,\underline{K}^k_i\,\underline{x}_{i_0} \tag{4.0–2}$$

für i=1,2,...,m angenommen. In der Gleichung (4.0-1) beinhaltet der Vektor $\underline{\alpha}^*_i$ die unbekannten Systemparameter des i-ten Untersystems. Der ebenfalls unbekannte Anfangszustand $\underline{x}_{i_0}$ des Systems wird durch die skalare Variable $f^*_{i_k}$ beschrieben.
Der adaptive Beobachter wird in der gleichen parametrisierten Struktur angenommen, womit sich die Gleichungen

$$\hat{y}_{i_k} = \hat{f}_{i_k} + \underline{z}^T_{i_k}\,\underline{\hat{\alpha}}_{i_k} \tag{4.0–3}$$

und

$$\hat{f}_{i_k} := \underline{c}^T_{i_i}\,\underline{K}^k_i\,\underline{\hat{x}}_{i_0} \tag{4.0–4}$$

für i=1,2,...,m ergeben.
Man beachte, daß die Vektoren $\underline{z}_{i_k}$ in den Gleichungen (4.0-1) und (4.0-3) identisch sind. Der zeitvariante Parametervektor $\underline{\hat{\alpha}}_{i_k}$ des Beobachters soll mit Hilfe eines Parameteradaptionsgesetzes gegen den wahren Parametervektor $\underline{\alpha}^*_i$ konvergieren. Zur Verdeutlichung wird das Bild 4.0 mit den Definitionen der Parametervektoren

$$\underline{\alpha}^{*T} := \left(\underline{\alpha}^{*T}_1\ \underline{\alpha}^{*T}_2\ ...\underline{\alpha}^{*T}_m\right) \tag{4.0–5}$$

und

$$\underline{\hat{\alpha}}^T_k := \left(\underline{\hat{\alpha}}^T_{1_k}\ \underline{\hat{\alpha}}^T_{2_k}\ ...\underline{\hat{\alpha}}^T_{m_k}\right) \tag{4.0–6}$$

betrachtet.

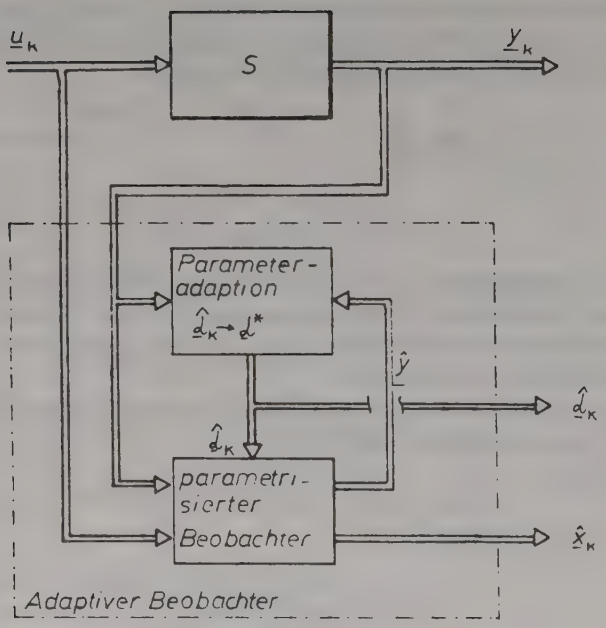

Bild 4.0 : Mehrgrößensystem mit adaptivem Beobachter.

Die Beschreibung (4.0-1) und (4.0-2) des Mehrgrößensystems in parametrisierter Darstellung dient den folgenden mathematischen Untersuchungen über die Konvergenz von

$$\hat{\underline{\alpha}}_k \longrightarrow \underline{\alpha}^* \tag{4.0-7}$$

und

$$\hat{\underline{x}}_k \longrightarrow \underline{x}_k \quad . \tag{4.0-8}$$

Hierzu werden die Definitionen des Parameter-, Anfangs- und Ausgangsfehlers eingeführt.

4.1 Definition des Anfangs-, Parameter- und Ausgangsfehlers

Der Parameterfehler

$$\tilde{\underline{\alpha}}_{i_k} := \hat{\underline{\alpha}}_{i_k} - \underline{\alpha}_i^* \quad , \quad i = 1, 2, ..., m \tag{4.1-1}$$

wird als Differenz des rekonstruierten Parametervektors $\hat{\underline{\alpha}}_{i_k}$ und des unbekannten Systemparametervektors $\underline{\alpha}_{i_k}^*$ definiert. Aufgrund verschiedener Anfangszustände des Beobachters und des Mehrgrößensystems wird weiterhin der Anfangsfehler

$$\tilde{f}_{i_k} := \hat{f}_{i_k} - f_{i_k}^* \quad , \quad i = 1, 2, ..., m \tag{4.1-2}$$

eingeführt.
Der Ausgangsfehler

$$\tilde{y}_{i_k} := \hat{y}_{i_k} - y_{i_k} \quad , \quad i = 1, 2, ..., m \tag{4.1-3}$$

ergibt sich aus den Systemausgängen und den Ausgängen des Beobachters. Werden die Ausgangsgrößen in Definition (4.1-3) durch die Gleichungen (4.0-3) und (4.0-1) entsprechend der Gleichung

$$\tilde{y}_{i_k} = \underline{z}_{i_k}^T (\hat{\underline{\alpha}}_{i_k} - \underline{\alpha}_i^*) + (\hat{f}_{i_k} - f_{i_k}^*) \quad , \quad i = 1, 2, ..., m \tag{4.1-4}$$

substituiert, so kann mit den vorher eingeführten Definitionen die Ausgangsfehlergleichung (4.1-4) durch Gleichung

$$\tilde{y}_{i_k} = \underline{z}_{i_k}^T \tilde{\underline{\alpha}}_{i_k} + \tilde{f}_{i_k} \quad , \quad i = 1, 2, ..., m \tag{4.1-5}$$

beschrieben werden.

4.2 Fehlerfunktional und Parameterverstellgesetz

Zur Ableitung des Parameterverstellgesetzes wird das zeitdiskrete Funktional

$$J_{i_k} = \frac{1}{2} \sum_{l=k_0}^{k-1} \beta_i^{k-l-1} \, \tilde{y}_{i_l} \tag{4.2-1}$$

mit dem Vergessensfaktor

$$0 < \beta_i < 1 \tag{4.2-2}$$

für $i = 1, 2, ..., m$ eingeführt. Bei diesem Funktional wird der Ausgangsfehler umso schwächer beurteilt, je weiter dieser zeitlich zurückliegt.
Um aus dem Funktional das Parameterverstellgesetz entwickeln zu können, wird der Ausgangsfehler durch die Definition (4.1-3) ersetzt. Anschließend wird die Ausgangsgröße $\hat{y}_{i_k}$ durch die Definition (4.0-3) substituiert, womit das Funktional lautet:

$$J_{i_k} = \frac{1}{2} \sum_{l=k_0}^{k-1} \beta_i^{k-l-1} \, [\underline{z}_{i_l}^T \, \underline{\hat{\alpha}}_{i_l} + \hat{f}_{i_l} - y_{i_l}]^2 \quad , \quad i = 1, 2, ..., m \quad . \tag{4.2-3}$$

Mit Hilfe des Gradienten kann das bekannte Parameterverstellgesetz

$$\underline{\hat{\alpha}}_{i_{k+1}} = \underline{\hat{\alpha}}_{i_k} - \underline{G}_{i_k} \frac{\partial J_{i_k}}{\partial \underline{\hat{\alpha}}_{i_k}} \quad , \quad i = 1, 2, ..., m \tag{4.2-4}$$

angegeben werden.
Ausgehend von einer Anfangsnäherung $\underline{\hat{\alpha}}_{i_0}$ werden weitere Näherungen aus der Gleichung (4.2-4) mit Hilfe des Gradienten berechnet. Die Auslegung der Matrix $\underline{G}_{i_k}$ erfolgt bei der Konvergenzanalyse im Abschnitt 4.4 .
Zunächst wird der Gradientenvektor

$$\frac{\partial J_{i_k}}{\partial \underline{\hat{\alpha}}_{i_k}} = \sum_{l=k_0}^{k-1} \beta_i^{k-l-1} \, \underline{z}_{i_l} \, [\underline{z}_{i_l}^T \, \underline{\hat{\alpha}}_{i_l} + \hat{f}_{i_l} - y_{i_l}] \quad , \quad i = 1, 2, ..., m \tag{4.2-5}$$

aus der Gleichung (4.2-3) gebildet und entsprechend der Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_{i_k}}{\partial \underline{\hat{\alpha}}_{i_k}} &= \sum_{l=k_0}^{k-1} \beta_i^{k-l-1} \, \underline{z}_{i_l} \, \underline{z}_{i_l}^T \, \underline{\hat{\alpha}}_{i_l} \\ &\quad + \sum_{l=k_0}^{k-1} \beta_i^{k-l-1} \, \underline{z}_{i_l} \, [\hat{f}_{i_l} - y_{i_l}] \quad , \\ &\quad i = 1, 2, ..., m \end{aligned} \tag{4.2-6}$$

umgeformt. Durch Einführung der Matrizen

$$\underline{R}_{i_k} := \sum_{l=k_0}^{k-1} \beta_i^{k-l-1} \, \underline{z}_{i_l} \, \underline{z}_{i_l}^T \quad , \quad i = 1, 2, ..., m \tag{4.2-7}$$

und der Vektoren

$$\underline{r}_{i_k} := \sum_{l=k_0}^{k-1} \beta_i^{k-l-1} \, \underline{z}_{i_l} [\hat{f}_{i_l} - y_{i_l}] \quad , \quad i = 1, 2, ..., m \quad , \tag{4.2-8}$$

die als Lösungen der Differenzengleichungen

$$\underline{R}_{i_{k+1}} = \beta_i \, \underline{R}_{i_k} + \underline{z}_{i_k} \, \underline{z}_{i_k}^T \quad , \tag{4.2-9}$$

$$\underline{R}_{i_{k_0}} = \underline{0} \tag{4.2-10}$$

und

$$\underline{r}_{i_{k+1}} = \beta_i \, \underline{r}_{i_k} + \underline{z}_{i_k} [\hat{f}_{i_k} - y_{i_k}] \quad , \tag{4.2-11}$$

$$\underline{r}_{i_{k_0}} = \underline{0} \tag{4.2-12}$$

für $i = 1, 2, ..., m$ aufgefaßt werden können, kann der folgende Gradientenvektor gewählt werden:

$$\frac{\partial \hat{f}_{i_k}}{\partial \underline{\hat{\alpha}}_{i_k}} := \underline{R}_{i_k} \underline{\hat{\alpha}}_{i_k} + \underline{r}_{i_k} \, , \quad i = 1, 2, ..., m \quad . \tag{4.2-13}$$

Die mathematische Überführung von Gleichung (4.2-6) mit den Definitionen (4.2-7) und (4.2-8) nach Definition (4.2-13) wäre nur bei konstantem Parametervektor, d.h. bei abgeschlossener Parameteradaption möglich gewesen.
Die Wahl des Gradienten (4.2-13) kann jedoch mit dem Ergebnis der Konvergenzanalyse begründet werden.
Wird der Gradient gemäß Definition (4.2-13) in die Gleichung (4.2-4) eingesetzt, so erhält man das Parameteradaptionsgesetz

$$\underline{\hat{\alpha}}_{i_{k+1}} = \underline{\hat{\alpha}}_{i_k} - \underline{G}_{i_k} [\underline{R}_{i_k} \underline{\hat{\alpha}}_{i_k} + \underline{r}_{i_k}] \tag{4.2-14}$$

für $i = 1, 2, ..., m$.
Konvergenzanalysen in [10], [11] zeigen eine exponentielle Konvergenz des Parameter- und Zustandsfehlers gegen Null.
Weiterführende Analysen zeigen aber, daß eine optimale Wahl der Vergessensfaktoren β_i im Sinne höchster Konvergenzgeschwindigkeit

so nicht möglich ist. Wird der Vergessensfaktor bei hinreichender Anregung und beschränkter Rechengenauigkeit zu klein gewählt, so kann keine Konvergenz gezeigt werden, wird dieser zu groß gewählt, so konvergieren Zustands- und Parameterfehler nicht hinreichend schnell.
Außerdem besteht beim zeitdiskreten Kalman-Beobachter die Möglichkeit, durch nilpotente Auslegung der Fehlermatrix, eine schrittoptimale Konvergenz der Zustandsfehler gegen Null zu erreichen.
Hieraus resultiert ein neuer Ansatz zur Parameteradaption, der eine exponentielle bis schrittoptimale Konvergenz der Parameter- und Zustandsfehler ermöglicht.

4.3 Verallgemeinerter Ansatz zur Parameteradaption

Ausgehend vom Gradienten

$$\frac{\partial J_{i_k}}{\partial \underline{\alpha}_{i_k}} := \underline{R}_{i_k} \underline{\hat{\alpha}}_{i_k} + \underline{r}_{i_k}, \quad i = 1, 2, ..., m \tag{4.3-1}$$

laut Definition (4.2-13) werden jetzt allgemeinere Definitionen für die (q_i, q_i) dimensionalen Matrizen

$$\underline{R}_{i_k} := \bar{\underline{C}}_i \sum_{l=k_0}^{k-1} \bar{\underline{A}}_i^{k-l-1} \bar{\underline{B}}_i \underline{z}_{i_l} \underline{z}_{i_l}^T \tag{4.3-2}$$

und die q_i dimensionalen Vektoren

$$\underline{r}_{i_k} := \bar{\underline{C}}_i \sum_{l=k_0}^{k-1} \bar{\underline{A}}_i^{k-l-1} \bar{\underline{B}}_i \underline{z}_{i_l} [\hat{f}_{i_l} - y_{i_l}] \tag{4.3-3}$$

mit den Matrizen

$$\bar{\underline{C}}_i \in R^{q_i x p_i}, \tag{4.3-4}$$

$$\bar{\underline{A}}_i \in R^{p_i x p_i}, \tag{4.3-5}$$

$$\bar{\underline{B}}_i \in R^{p_i x q_i} \tag{4.3-6}$$

für $i = 1, 2, ..., m$ eingeführt. Die Dimension

$$q_i = (m + r) n_i + i - 1$$

ergibt sich aus den Definitionen (3.4-14) und (3.4-15). Die Dimension p_i mit der Vorschrift

$$q_i \leq p_i < \infty$$

wird später noch genauer festgelegt.
Die Definitionen (4.3-2) und (4.3-3) können ebenfalls als Lösungen der dynamischen Systeme mit den Beschreibungen

$$\bar{R}_{i_{k+1}} = \bar{A}_i \bar{R}_{i_k} + \bar{B}_i \underline{z}_{i_k} \underline{z}_{i_k}^T \quad , \tag{4.3-7}$$

$$\underline{R}_{i_k} = \bar{C}_i \bar{R}_{i_k} \quad , \tag{4.3-8}$$

$$\bar{R}_{i_{k_0}} = \underline{0} \quad , \quad \bar{R}_{i_k} \in R^{p_i x q_i} \tag{4.3-9}$$

und

$$\underline{\bar{r}}_{i_{k+1}} = \bar{A}_i \underline{\bar{r}}_{i_k} + \bar{B}_i \underline{z}_{i_k} [\hat{f}_{i_k} - y_{i_k}] \quad , \tag{4.3-10}$$

$$\underline{r}_{i_k} = \bar{C}_i \underline{\bar{r}}_{i_k} \quad , \tag{4.3-11}$$

$$\underline{\bar{r}}_{i_{k_0}} = \underline{0} \quad , \quad \underline{\bar{r}}_{i_k} \in R^{p_i} \tag{4.3-12}$$

für $i = 1, 2, ..., m$ aufgefaßt werden.
Mit dem Gradienten (4.3-1) wird das Parameteradaptionsgesetz

$$\underline{\hat{\alpha}}_{i_{k+1}} = \underline{\hat{\alpha}}_{i_k} - \underline{G}_{i_k} [\underline{R}_{i_k} \underline{\hat{\alpha}}_{i_k} + \underline{r}_{i_k}] \quad , \quad i = 1, 2, ..., m \tag{4.3-13}$$

mit der noch auszulegenen (q_i, q_i) dimensionalen Matrix $\underline{G}_{i_k}$ angegeben. Mit diesem Ansatz zur Parameteradaption, beschrieben durch das Parameterverstellgesetz (4.3-13) und den Systemen mit den Gleichungen (4.3-7) bis (4.3-9) und (4.3-10) bis (4.3-12), wird eine Konvergenzanalyse durchgeführt.

4.4 Konvergenzanalyse

In diesem Kapitel soll die Konvergenz des Parameter- und Zustandsfehlers gegen Null gezeigt werden. Im Kapitel 1.1 wurde auf die Bedeutung der Konvergenzgeschwindigkeit und die Bedingungen für die Einhaltung der Konvergenz hingewiesen.

Im ersten Abschnitt der Analyse wird die Parameterfehlergleichung aufgestellt. Anhand dieser Parameterfehlergleichung wird im zweiten Abschnitt der Satz und der Beweis über die exponentielle Stabilität des adaptiven Beobachters angegeben.

4.4.1 Parameterfehlergleichung

Zunächst wird von der Gleichung (4.3-13) beidseitig der Parametervektor $\underline{\alpha}_i^*$ subtrahiert und die Differenz

$$\hat{\underline{\alpha}}_{i_{k+1}} - \underline{\alpha}_i^* = \hat{\underline{\alpha}}_{i_k} - \underline{\alpha}_i^* - \underline{G}_{i_k}[\underline{R}_{i_k}\hat{\underline{\alpha}}_{i_k} + \underline{r}_{i_k}] \quad , \quad i = 1, 2, ..., m \tag{4.4.1-1}$$

mit der Definition (4.1-1) verglichen. Durch weitere Substitution von $\underline{r}_{i_k}$ gemäß der Definition (4.3-3) lautet die Fehlerdifferenzengleichung

$$\tilde{\underline{\alpha}}_{i_{k+1}} = \tilde{\underline{\alpha}}_{i_k} - \underline{G}_{i_k}[\underline{R}_{i_k}\hat{\underline{\alpha}}_{i_k} + \bar{\underline{C}}_i \sum_{l=k_0}^{k-1} \bar{A}_i^{k-l-1} \bar{\underline{B}}_i \underline{z}_{i_l}[\hat{f}_{i_l} - y_{i_l}]] \quad , \quad i = 1, 2, ..., m \quad , \tag{4.4.1-2}$$

die mit Substitution von y_{i_l} nach Definition (4.0-1) zur Gleichung

$$\tilde{\underline{\alpha}}_{i_{k+1}} = \tilde{\underline{\alpha}}_{i_k} - \underline{G}_{i_k}[\underline{R}_{i_k}\hat{\underline{\alpha}}_{i_k} - \bar{\underline{C}}_i \sum_{l=k_0}^{k-1} \bar{A}_i^{k-l-1} \bar{\underline{B}}_i \underline{z}_{i_l} \underline{z}_{i_l}^T \underline{\alpha}_i^* - \bar{\underline{C}}_i \sum_{l=k_0}^{k-1} \bar{A}_i^{k-l-1} \bar{\underline{B}}_i \underline{z}_{i_l}[\hat{f}_{i_l} - f_{i_l}^*]] \quad , \quad i = 1, 2, ..., m \tag{4.4.1-3}$$

umgeformt werden kann.

Ein Vergleich mit den Definitionen (4.3-2) und (4.1-2) ergibt die Parameterfehlergleichung

$$\underline{\tilde{\alpha}}_{i_{k+1}} = [\underline{I} - \underline{G}_{i_k} \underline{R}_{i_k}]\underline{\tilde{\alpha}}_{i_k} - \underline{G}_{i_k}\bar{C}_i \sum_{l=k_0}^{k-1} \bar{A}_i^{k-l-1} \bar{B}_i \underline{z}_{i_l} \tilde{f}_{i_l} \quad , \quad i = 1, 2, ..., m \quad , \tag{4.4.1-4}$$

die mit den Definitionen

$$\tilde{A}_{i_k} := [\underline{I} - \underline{G}_{i_k} \underline{R}_{i_k}] \quad , \quad i = 1, 2, ..., m \tag{4.4.1-5}$$

und

$$\underline{\tilde{s}}_{i_k} := -\underline{G}_{i_k}\bar{C}_i \sum_{l=k_0}^{k-1} \bar{A}_i^{k-l-1} \bar{B}_i \underline{z}_{i_l} \tilde{f}_{i_l} \quad , \quad i = 1, 2, ..., m \tag{4.4.1-6}$$

zur Differenzengleichung

$$\underline{\tilde{\alpha}}_{i_{k+1}} = \tilde{A}_{i_k} \underline{\tilde{\alpha}}_{i_k} + \underline{\tilde{s}}_{i_k} \quad , \quad i = 1, 2, ..., m \tag{4.4.1-7}$$

umgeformt werden kann.

4.4.2 Exponentielle Konvergenz des Parameter- und Zustandsfehlers

Das System mit der Beschreibung (4.4.1-7) heißt exponentiell stabil [21], wenn für jede Lösung $\underline{\tilde{\alpha}}_i(k, k_0, \underline{\tilde{\alpha}}_{k_0})$ die Bedingung

$$\left\| \underline{\tilde{\alpha}}_i(k, k_0, \underline{\tilde{\alpha}}_{k_0}) \right\| \leq c\,\gamma^{k-k_0} \qquad (4.4.2\text{-}1)$$

mit $c > 0, \gamma \in [0,1)$ für $i = 1, 2, ..., m$ gilt.
Um diese Abschätzung (4.4.2-1) durchführen zu können , werden mehrere Lemmata eingeführt.
Die exponentielle Konvergenz des Anfangsfehlers untersucht das

Lemma 4.4.2.A. : *Wenn die Matrizen $\underline{K}_i$ für $i = 1, 2, ..., m$ zur Klasse der exponentiell stabilen Matrizen gehören , d.h daß für die Norm der Matrizen $\underline{K}_i$ mit $c > 0$ und $\lambda \in [0,1)$ für alle $k \in [k_0, \infty)$ die Ungleichung*

$$\left\| \underline{K}_i^{k-k_0} \right\| \leq c\,\lambda^{k-k_0} \qquad (4.4.2\text{-}2)$$

für $i = 1, 2, ..., m$ erfüllt ist, dann existiert ein $c_1 > 0$, so daß für die Norm des Anfangsfehlers die Ungleichung

$$\left\| \tilde{f}_{i_k} \right\| \leq c_1\,\lambda^{k-k_0} \quad , \quad i = 1, 2, ..., m \qquad (4.4.2\text{-}3)$$

gilt.

Beweis: Zunächst werden in der Definition (4.1-2) des Anfangsfehlers die Variablen $\hat{f}_{i_k}$ und $f^*_{i_k}$ durch die Definitionen (4.0-4) und (4.0-2) laut Gleichung

$$\tilde{f}_{i_k} = \underline{c}_{ii}^T\, \underline{K}_i^{k-k_0} \left[\underline{\hat{x}}_{i_{k_0}} - \underline{x}_{i_{k_0}} \right] \quad , \quad i = 1, 2, ..., m \qquad (4.4.2\text{-}4)$$

ersetzt. Mit Bildung der Norm entsteht die Ungleichung

$$\left\| \tilde{f}_{i_k} \right\| \leq \left\| \underline{c}_{ii}^T \right\| \left\| \underline{K}_i^{k-k_0} \right\| \left\| \underline{\hat{x}}_{i_{k_0}} - \underline{x}_{i_{k_0}} \right\| \quad , \quad i = 1, 2, ..., m \quad , \qquad (4.4.2\text{-}5)$$

die mit der Eigenschaft (4.4.2-2) exponentiell stabiler Matrizen in die Abschätzung

$$\left\| \tilde{f}_{i_k} \right\| \leq c_2\, c\, \lambda^{k-k_0}\, c_4 \quad , \quad i = 1, 2, ..., m \qquad (4.4.2\text{-}6)$$

mit den positiven beschränkten Konstanten $c_2, c\ , c_4$ überführt werden kann. Der Hilfssatz ist somit nach Zusammenfassung der Konstanten bewiesen. ∎

Der Hilfssatz 4.4.2.A ermöglicht jetzt eine Abschätzung der " Eingangsgröße " $\underline{\tilde{s}}_{i_k}$ des Systems mit der Beschreibung (4.4.1-7) durch das

LEMMA 4.4.2.B. : *Wenn die Matrizen* $\underline{G}_{i_k}$, $\bar{B}_i$, $\bar{C}_i$ *und der Vektor* $\underline{z}_{i_k}$ *mit*

$$\|\underline{G}_{i_k}\| \leq c_1 \quad , \quad c_1 > 0 \quad , \tag{4.4.2-7}$$

$$\|\bar{B}_i\| \leq c_2 \quad , \quad c_2 > 0 \quad , \tag{4.4.2-8}$$

$$\|\bar{C}_i\| \leq c_3 \quad , \quad c_3 > 0 \quad , \tag{4.4.2-9}$$

$$\|\underline{z}_{i_k}\| \leq c_4 \quad , \quad c_4 > 0 \tag{4.4.2-10}$$

für $i = 1, 2, ..., m$ *und* $k \in [k_0, \infty)$ *beschränkt sind, und die Matrizen* $\bar{A}_i$ *für* $i = 1, 2, ..., m$ *zur Klasse der exponentiell stabilen Matrizen mit*

$$\left\|\bar{A}_i^{k-k_0}\right\| \leq c_5 \, \beta^{k-k_0} \quad , \quad c_5 > 0 \tag{4.4.2-11}$$

für $\beta \in [0, 1)$ *und* $i = 1, 2, ..., m$ *gehören, dann kann für die " Eingangsgröße "* $\underline{\tilde{s}}_{i_k}$ *folgende Abschätzung*

$$\|\underline{\tilde{s}}_{i_k}\| \leq c_6 \, \xi^{k-k_0} \quad , \quad c_6 > 0 \tag{4.4.2-12}$$

mit $k \in [k_0, \infty]$, $i = 1, 2, ..., m$ *und*

$$\xi := \begin{cases} \beta \text{ , für } \beta > \lambda \\ \lambda \text{ , für } \beta \leq \lambda \end{cases} \tag{4.4.2-13}$$

angegeben werden.

BEWEIS: Mit Bildung der Norm über die "Eingangsgröße" $\underline{\tilde{s}}_{i_k}$ laut Definition (4.4.1-6) entsteht die Gleichung

$$\|\underline{\tilde{s}}_{i_k}\| = \left\| \underline{G}_{i_k} \bar{C}_i \sum_{l=k_0}^{k-1} \bar{A}_i^{k-l-1} \bar{B}_i \underline{z}_{i_l} \tilde{f}_{i_l} \right\| \tag{4.4.2-14}$$

für $i = 1, 2, ..., m$.
Durch weitere Umformung mit Matrix- und dazu verträglichen Vektornormen kann für die Gleichung (4.4.2-14) die Abschätzung

$$\|\underline{\tilde{s}}_{i_k}\| \leq \|\underline{G}_{i_k}\| \left\| \bar{C}_i \sum_{l=k_0}^{k-1} \bar{A}_i^{k-l-1} \bar{B}_i \underline{z}_{i_l} \tilde{f}_{i_l} \right\| \quad ,$$

$$\|\underline{\tilde{s}}_{i_k}\| \leq \|\underline{G}_{i_k}\| \, \|\bar{C}_i\| \sum_{l=k_0}^{k-1} \left\|\bar{A}_i^{k-l-1}\right\| \|\bar{B}_i\| \, \|\underline{z}_{i_l}\| \left\|\tilde{f}_{i_l}\right\| \tag{4.4.2-15}$$

für $i = 1, 2, ..., m$ vollzogen werden. Mit der Beschränktheit der Matrizen und Vektoren gemäß den Ungleichungen (4.4.2-7) bis (4.4.2-11) kann unter Betrachtung des Lemma 4.4.2.A die weitere Abschätzung

$$\|\underline{\tilde{s}}_{i_k}\| \leq c \sum_{l=k_0}^{k-1} \beta^{k-l-1}\lambda^{l-k_0} \quad ,$$

$$\|\underline{\tilde{s}}_{i_k}\| \leq c\,[\beta^{k-k_0-1}\lambda^0 + \beta^{k-k_0}\lambda^1 + ... + \beta^0\lambda^{k-1-k_0}] \qquad (4.4.2\text{–}16)$$

für $i = 1, 2, ..., m$ durchgeführt werden. Mit der Definition (4.4.2-13) kann die Ungleichung (4.4.2-16) entsprechend

$$\|\underline{\tilde{s}}_{i_k}\| \leq c[\xi^{k-k_0-1} + \xi^{k-k_0-1} + ... + \xi^{k-k_0-1}] \quad ,$$

$$\|\underline{\tilde{s}}_{i_k}\| \leq c[k - k_0 - 1]\xi^{k-k_0-1} \quad ,$$

$$\|\underline{\tilde{s}}_{i_k}\| \leq c_8\,\xi^{k-k_0} \qquad (4.4.2\text{–}17)$$

mit der Grenzwertbetrachtung für $k- > \infty$ und den Regeln von l'Hospital für $i = 1, 2, ..., m$ abgeschätzt werden, womit der Beweis des Satzes gezeigt ist. ∎

Mit dem Lemma 4.4.2.B wurde die exponentielle Konvergenz von $\underline{\tilde{s}}_{i_k}$ gegen Null nachgewiesen. Der inhomogene Teil der Parameterfehlergleichung (4.4.1–7) konvergiert für $k \longrightarrow \infty$ gegen Null.
Um die Stabilität des homogenen Teils der Differenzengleichung (4.4.1-7) zu gewährleisten, wird die Existenz der Matrix $\underline{R}_{i_k}^{-1}$ untersucht im

LEMMA 4.4.2.C. : *Die inverse Matrix* $\underline{R}_{i_k}^{-1}$ *existiert dann und nur dann wenn das System mit der Beschreibung (4.3-7) bis (4.3-9) steuerbar,* $Rang\,\underline{\bar{C}}_i = q_i$ *und die Vektoren* $\underline{z}_{i_k}$ *linear unabhängig sind. Die Vektoren sind dann linear unabhängig, wenn es kein* $\underline{\varsigma} \neq \underline{0}$ *so existiert, daß die Gleichung*

$$\underline{\varsigma}_i^T \underline{z}_{i_l} = 0 \quad , \quad i = 1, 2, ..., m \tag{4.4.2-18}$$

für alle $l \in [k_0, k-1]$ *gilt.*

BEWEIS: Wenn kein $\underline{\varsigma} \neq \underline{0}$ existiert, so daß die Gleichung (4.4.2–18) mit $Rang\,\underline{\bar{C}}_i = q_i$ und der Steuerbarkeit des Systems mit der Beschreibung (4.3-7) bis (4.3-9) gilt, dann existiert die Matrix $\underline{R}_{i_k}^{-1}$.
Der Beweis wird indirekt über folgende Widerspruchsannahme geführt: Die Vektoren $\underline{z}_{i_k}$ sind linear unabhängig, das System mit der Beschreibung (4.3-7) bis (4.3-9) ist steuerbar und $Rang\,\underline{\bar{C}}_i = q_i$, aber die Matrix $\underline{R}_{i_k}$ ist singulär.
Zunächst wird die quadratische Form

$$\underline{a}_i^T \underline{R}_{i_k} \underline{a}_i = \underline{a}_i^T \underline{\bar{C}}_i \sum_{l=k_0}^{k-1} \underline{\bar{A}}_i^{k-l-1} \underline{\bar{B}}_i \underline{z}_{i_l} \underline{z}_{i_l}^T \underline{a}_i = 0 \quad , \quad i = 1, 2, ..., m \tag{4.4.2-19}$$

aus Definition (4.3-2) gebildet, die nach der Widerspruchsannahme semidefinit ist. Unter der Voraussetzung, daß das System mit der Beschreibung (4.3-7) bis (4.3-9) steuerbar und $Rang\,\underline{\bar{C}}_i = q_i$ ist, existiert ein Vektor $\underline{a}_i \neq \underline{0}$ für alle $k \in [k_0, k-1]$, so daß die Gleichung

$$\underline{z}_{i_l}^T \underline{a}_i = 0 \quad , \quad i = 1, 2, ..., m \tag{4.4.2-20}$$

oder zusammengefaßt die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{m} \underline{z}_{i_l}^T \underline{a}_i = 0 \tag{4.4.2-21}$$

für $\underline{a}_i \neq \underline{0}$ gilt.
Dies ist aber der gewünschte Widerspruch zur Annahme.

Der zweite Schritt des Beweises wird ebenfalls indirekt über folgende Annahme geführt: Die Matrix $\underline{R}_{i_k}^{-1}$ existiert, obwohl die Bedingung (4.4.2-18) eingehalten werden kann. Die quadratische Form (4.4.2-19) ist bei Existenz der Matrix $\underline{R}_{i_k}^{-1}$ nicht semidefinit, so daß die Gleichung

$$\underline{a}_i^T \underline{R}_{i_k} \underline{a}_i = \underline{a}_i^T \bar{C}_i \sum_{l=k_0}^{k-1} \bar{A}_i^{k-l-1} \bar{B}_i \underline{z}_{i_l} \underline{z}_{i_l}^T \underline{a}_i \neq 0 \quad , \quad i = 1, 2, ..., m \tag{4.4.2-22}$$

gilt.
Da das System mit der Beschreibung (4.3-7) bis (4.3-9) steuerbar und Rang $\bar{C}_i = q_i$ ist, folgt der Widerspruch durch Gleichung

$$\underline{z}_{i_l}^T \underline{a}_i \neq 0 \quad , \quad i = 1, 2, ..., m \tag{4.4.2-23}$$

zu der zweiten Annahme. ∎

Die Existenz der Matrizen $\underline{R}_{i_k}^{-1}$ für $i = 1, 2, ..., m$ ist auf die lineare Unabhängigkeit der Vektoren $\underline{z}_{i_k}$ zurückgeführt.
Durch eine hinreichende Anregung des Systems über den Eingangsvektor $\underline{u}$ kann die lineare Unabhängigkeit der Vektoren $\underline{z}_{i_k}$ gesichert werden.
Unter hinreichender Anregung des Systems durch den Eingangsvektor versteht man die Aussage der

DEFINITION 4.4.2.D. : *Der Eingansgsvektor* $\underline{u} \in R^r$ *heißt hinreichend angeregt , wenn die Folgen*

$$u_{1_k}, u_{1_{k+1}}, ..., u_{1_{k+p}}, \; u_{2_k}, u_{2_{k+1}}, ..., u_{2_{k+p}}, ..., \; u_{r_k}, u_{r_{k+1}}, ..., u_{r_{k+p}} \tag{4.4.2-24}$$

mit

$$p := n + \max_i \{ n_i \} - 1 \tag{4.4.2-25}$$

auf dem Intervall $[k_0, \infty)$ *linear unabhängig sind.*

Die Folgen (4.4.2-24) sind dann linear abhängig im Intervall $k \in [k_0, k_e]$, wenn ein Vektor $\underline{a} \neq \underline{0}$ so existiert, daß die Gleichung

$$\underline{a}^T \begin{pmatrix} u_{1_k} \\ u_{1_{k+1}} \\ \vdots \\ u_{1_{k+p}} \\ u_{2_k} \\ u_{2_{k+1}} \\ \vdots \\ u_{2_{k+p}} \\ \vdots \\ u_{r_k} \\ u_{r_{k+1}} \\ \vdots \\ u_{r_{k+p}} \end{pmatrix} = 0 \qquad (4.4.2\text{–}26)$$

gilt. Mit der Definition

$$A_i(z) := a_{i_0} + a_{i_1} z^1 + \ldots + a_{i_p} z^p \qquad (4.4.2\text{–}27)$$

kann eine andere Bedingung

$$\sum_{i=1}^{r} A_i(z)\, u_i(z) = 0 \qquad (4.4.2\text{–}28)$$

für die lineare Abhängigkeit des Eingangsvektors beschrieben werden. Mit Definition 4.4.2.D und Lemma 4.4.2.C kann folgender Hilfssatz zur Sicherung der Existenz von $\underline{R}_{i_k}^{-1}$ angegeben werden:

LEMMA 4.4.2.E. : *Die Vektoren* $\underline{z}_{i_l}$ *für* $i = 1, 2, ..., m$ *sind dann linear unabhängig im Intervall* $l \in [k_0, k-1]$, *wenn der Eingangsvektor* $\underline{u}$ *hinreichend angeregt worden ist.*

BEWEIS: Der Beweis wird indirekt mit der folgenden Widerspruchsannahme geführt. Bei hinreichender Anregung des Eingangsvektors existiert mindestens ein $i \in \{1, 2, ..., m\}$ und ein Vektor $\underline{\mu}_i \neq 0$, so daß für alle $l \in [k_0, k-1]$ die Gleichung

$$\underline{\mu}_i^T \, \underline{z}_{i_l} = 0 \tag{4.4.2-29}$$

gilt.
Zunächst werden die Komponenten des Vektors $\underline{z}_{i_l}$ gemäß der Definition (3.4-13) betrachtet und umgeformt . Die Vektoren $\underline{v}_{ij}$ werden laut der Definition (3.3-19) durch die Gleichung

$$\underline{v}_{ij}(z) = [z\,\underline{I} - \underline{K}_i^T]^{-1} \, \underline{e}_1 \, y_j(z) \tag{4.4.2-30}$$

$i, j = 1, 2, ..., m$ berechnet. Mit der Definition

$$t_{1_i}(z) := det[z\,\underline{I} - \underline{K}_i] \tag{4.4.2-31}$$

für $i = 1, 2, ..., m$ des Polynoms n_i-ter Ordnung in z und der Aussage

$$[z\,\underline{I} - \underline{K}_i^T]^{-1} \, \underline{e}_1 = \frac{1}{t_{1_i}(z)} \begin{pmatrix} z^{n_i-1} \\ z^{n_i-2} \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4.4.2-32}$$

des Lemmas 3.3.A folgt mit der Definition des Vektors

$$\underline{z}^T := \left(z^{n_i-1} \; z^{n_i-2} \; ... \; 1 \right) \tag{4.4.2-33}$$

die Gleichung

$$\underline{v}_{ij}(z) = \frac{1}{t_{1_i}(z)} \, \underline{z} \, y_j(z) \tag{4.4.2-34}$$

für $i, j = 1, 2, ..., m$.
Die Vektoren

$$\underline{w}_{ij}(z) = [z\underline{I} - \underline{K}_i^T]^{-1} \, \underline{e}_1 \, u_j(z) \tag{4.4.2-35}$$

für $i = 1, 2, ..., m$ und $j = 1, 2, ..., r$ laut der Definition (3.3-20) werden analog zu den vorherigen Umformungen mit den Definitionen (4.4.2-31) und (4.4.2-33) und Lemma 3.3.A in die Form

$$\underline{w}_{ij}(z) = \frac{1}{t_{1_i}(z)} \, \underline{z} \, u_j(z) \tag{4.4.2-36}$$

gebracht.

Zur Berechnung der Ausgangsgrößen y_i wird die Z-transformierte Gleichung (2.1-1) in die Z-transformierte Gleichung (2.1-2) eingesetzt. Hieraus folgt die Gleichung

$$\underline{y}(z) = \underline{C}\,[z\,\underline{I} - \underline{A}]^{-1}\,\underline{B}\,\underline{u}(z) \quad , \tag{4.4.2-37}$$

die mit den Definitionen der (m,r)-Matrix

$$\underline{T}(z) := \underline{C}\,adj\,(z\,\underline{I} - \underline{A})\,\underline{B} =: \{\bar{t}_{ij}(z)\} \tag{4.4.2-38}$$

für $i = 1, 2, ..., m$ und $j = 1, 2, ..., r$ und dem Polynom n -ter Ordnung

$$t_2(z) := det\,(z\,\underline{I} - \underline{A}) \tag{4.4.2-39}$$

in die Gleichung

$$y_i(z) = \sum_{j=1}^{r} \frac{1}{t_2(z)}\,\bar{t}_{ij}(z)\,u_j(z) \tag{4.4.2-40}$$

für $i = 1, 2, ..., m$ überführt werden kann.
Die Elemente $\bar{t}_{ij}(z)$ der Matrix $\underline{T}(z)$ sind Polynome $(n-1)$ - ter Ordnung in der Variablen z .
Nach Umformung der Komponenten des Vektors $\underline{z}_i(z)$ kann die Widerspruchsanahme mit Hilfe der Z-transformierten Gleichung (4.4.2-29) durch

$$\underline{\mu}_i^T \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{i-1} \\ \underline{v}_{i1} \\ \underline{v}_{i2} \\ \vdots \\ \underline{v}_{im} \\ \underline{w}_{i1} \\ \underline{w}_{i2} \\ \vdots \\ \underline{w}_{ir} \end{pmatrix}_{(z)} = 0 \quad , \quad \underline{\mu}_i \neq \underline{0} \quad , \quad i \in \{1, 2, ..., m\} \tag{4.4.2-41}$$

beschrieben werden. Werden die Vektoren $\underline{v}_{ij}$ durch die Gleichungen (4.4.2-34) und (4.4.2-40), die Vektoren $\underline{w}_{ij}$ durch die Gleichung (4.4.2-36) und die Ausgangsgröße y_i durch die Gleichung (4.4.2-40) in der Gleichung (4.4.2-41) substituiert, so folgt die Gleichung

$$\underline{\mu}_i^T \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{r} t_2^{-1}(z)\, \bar{l}_{1j}(z)\, u_j(z) \\ \sum_{j=1}^{r} t_2^{-1}(z)\, \bar{l}_{2j}(z)\, u_j(z) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{r} t_2^{-1}(z)\, \bar{l}_{i-1\,j}(z)\, u_j(z) \\ t_{1i}^{-1}(z) \underline{z} \sum_{j=1}^{r} t_2^{-1}(z)\, \bar{l}_{1j}(z)\, u_j(z) \\ t_{1i}^{-1}(z) \underline{z} \sum_{j=1}^{r} t_2^{-1}(z)\, \bar{l}_{2j}(z)\, u_j(z) \\ \vdots \\ t_{1i}^{-1}(z) \underline{z} \sum_{j=1}^{r} t_2^{-1}(z)\, \bar{l}_{mj}(z)\, u_j(z) \\ t_{1i}^{-1}(z) \underline{z}\, u_1(z) \\ t_{1i}^{-1}(z) \underline{z}\, u_2(z) \\ \vdots \\ t_{1i}^{-1}(z) \underline{z}\, u_r(z) \end{pmatrix} = 0 \quad , \quad \underline{\mu}_i \neq \underline{0} \qquad (4.4.2\text{–}42)$$

für $i \in \{1, 2, ..., m\}$.

Die Multiplikation der Gleichung (4.4.2-42) mit den Polynomen $t_{1i}(z)$ und $t_2(z)$ ergibt die Gleichung

$$\underline{\mu}_i^T \begin{pmatrix} t_{1i}(z) \sum_{j=1}^{r} \bar{l}_{1j}(z)\, u_j(z) \\ t_{1i}(z) \sum_{j=1}^{r} \bar{l}_{2j}(z)\, u_j(z) \\ \vdots \\ t_{1i}(z) \sum_{j=1}^{r} \bar{l}_{i-1j}(z)\, u_j(z) \\ \underline{z} \sum_{j=1}^{r} \bar{l}_{1j}(z)\, u_j(z) \\ \underline{z} \sum_{j=1}^{r} \bar{l}_{2j}(z)\, u_j(z) \\ \vdots \\ \underline{z} \sum_{j=1}^{r} \bar{l}_{mj}(z)\, u_j(z) \\ t_2(z)\underline{z}\, u_1(z) \\ t_2(z)\underline{z}\, u_2(z) \\ \vdots \\ t_2(z)\underline{z}\, u_r(z) \end{pmatrix} = 0 \quad , \quad \underline{\mu}_i \neq \underline{0} \qquad (4.4.2\text{–}43)$$

für $i \in \{1, 2, ..., m\}$.
Die linke Seite der Gleichung wird ausmultipliziert, wodurch die Gleichung

$$\sum_{j=1}^{r} t_{1i}(z)\,[\bar{t}_{1j}(z)\mu_{i_1} + \bar{t}_{2j}(z)\mu_{i_2} + \ldots + \bar{t}_{i-1j}(z)\mu_{i_{i-1}}]\,u_j(z) +$$

$$\sum_{j=1}^{r} \underline{z}\,[\bar{t}_{1j}(z)\mu_{i_i} + \bar{t}_{2j}(z)\mu_{i_{i+1}} + \ldots + \bar{t}_{mj}(z)\mu_{i_{i+m}}]\,u_j(z) +$$

$$\sum_{j=1}^{r} \underline{z}\,t_2(z)\,\mu_{i_{i+m+j}}\,u_j(z) = 0 \qquad \textbf{(4.4.2-44)}$$

entsteht, die mit den Definitionen der Polynome

$$A_{ij}(z) := t_{1i}(z)\,[\bar{t}_{1j}(z)\mu_{i_1} + \bar{t}_{2j}(z)\mu_{i_2} + \ldots + \bar{t}_{i-1j}(z)\mu_{i_{i-1}}] \quad , \qquad \textbf{(4.4.2-45)}$$

$$B_{ij}(z) := \underline{z}\,[\bar{t}_{1j}(z)\mu_{i_i} + \bar{t}_{2j}(z)\mu_{i_{i+1}} + \ldots + \bar{t}_{mj}(z)\mu_{i_{i+m}}] \quad , \qquad \textbf{(4.4.2-46)}$$

$$C_{ij}(z) := \underline{z}\,t_2(z)\,\mu_{i_{i+m+j}} \quad , \qquad \textbf{(4.4.2-47)}$$

$$D_{ij}(z) := A_{ij}(z) + B_{ij}(z) + C_{ij}(z) \qquad \textbf{(4.4.2-48)}$$

der Grade

$$Grad[A_{ij}(z)] = n_i + n - 1 \quad , \qquad \textbf{(4.4.2-49)}$$

$$Grad[B_{ij}(z)] = n_i + n - 2 \quad , \qquad \textbf{(4.4.2-50)}$$

$$Grad[C_{ij}(z)] = n_i + n - 1 \quad , \qquad \textbf{(4.4.2-51)}$$

$$Grad[D_{ij}(z)] = n_i + n - 1 \qquad \textbf{(4.4.2-52)}$$

in die Gleichung

$$\sum_{j=1}^{r} D_{ij}(z)\,u_j(z) = 0 \quad , \quad i \in \{1, 2, \ldots, m\} \qquad \textbf{(4.4.2-53)}$$

überführt werden kann. Der Grad des Polynoms $D_{ij}(z)$ ist maximal

$$p := n + \max_i\{n_i\} - 1 \quad . \qquad \textbf{(4.4.2-54)}$$

Vergleicht man hierzu die Definition 4.4.2.D, so bedeutet die Gleichung (4.4.2-53) die lineare Abängigkeit der Funktionen (4.4.2-26). Das widerspricht der Annahme, daß bei hinreichender Anregung des Eingangsvektors die Vektoren $\underline{z}_{i_i}$ linear abhängig sind. ∎

Die Existenz der Matrix $\underline{R}_{i_k}^{-1}$ ist somit bei hinreichender Anregung des Eingangsvektors gesichert.
Bei hinreichender beschränkter Anregung des Eingangsvektors erhält man die Aussage des

LEMMA 4.4.2.F. : *Wenn der Eingangsvektor* $\underline{u}$ *hinreichend und beschränkt angeregt ist, dann sind*

(i) *die Vektoren* $\underline{z}_{i_k}$ *und*
(ii) *die Matrizen* $\underline{R}_{i_k}^{-1}$

für $i = 1, 2, ..., m$ *und alle* $k \in [k_0, \infty]$ *beschränkt.*

BEWEIS: Die Vektoren

$$\underline{z}_{i_k}^T = \left(y_1\, y_2 \cdots y_{i-1}\, \underline{v}_{i1}^T\, \underline{v}_{i2}^T \cdots \underline{v}_{im}^T\, \underline{w}_{i1}^T\, \underline{w}_{i2}^T \cdots \underline{w}_{ir}^T \right)_k \qquad (4.4.2\text{–}55)$$

sind für $i = 1, 2, ..., m$ beschränkt, wenn deren Elemente beschränkt sind.
Aus der BIBO-Stabilität[1] des Mehrgrößensystems mit der mathematischen Beschreibung (2.0-1) und (2.0-2) folgt, daß bei hinreichender beschränkter Anregung des Eingangsvektors $\underline{u}_k$ der Ausgangsvektor $\underline{y}_k$ beschränkt ist.
Diese beschränkten Ein- und Ausgänge $u_1, u_2, ..., u_r, y_1, y_2, ..., y_m$ des Mehrgrößensystems sind Eingangsgrößen der dynamischen Systeme mit den Beschreibungen (3.3-24),(3.3-25) und (3.3-26),(3.3-27). Aus der Stabilität der dynamischen Systeme folgt, daß die Vektoren $\underline{v}_{ij}$ für $i, j = 1, 2, ..., m$ und $\underline{w}_{ij}$ für $i = 1, 2, ..., m$, $j = 1, 2, ..., r$ beschränkt sind.
Hieraus folgt der Beweis von (i) .
Der zweite Teil des Beweises zeigt, daß bei hinreichender beschränkter Anregung des Eingangsvektors die Matrizen $\underline{R}_{i_k}^{-1}$ für $i = 1, 2, ..., m$ beschränkt sind.
Für die inversen Matrizen $\underline{R}_{i_k}^{-1}$ kann die Gleichung

$$\| \underline{R}_{i_k}^{-1} \| = \frac{\| adj\, \underline{R}_{i_k} \|}{|det \underline{R}_{i_k}|} \quad , \quad i = 1, 2, ..., m \qquad (4.4.2\text{–}56)$$

angegeben werden. Bei hinreichender Anregung des Eingangsvektors gemäß Lemma 4.4.2.C und Lemma 4.4.2.E existiert die Matrix $\underline{R}_{i_k}^{-1}$

[1] Aus der asymptotischen Stabilität eines Systems folgt bei beschänkten Matrizen $\underline{B}'$ und $\underline{C}'$ die Bounded - Input - Bounded - Output Stabilität.

und somit ist $\det \underline{R}_{i_k} \neq 0$. Mit Bildung der Norm über die Definition (4.3-2) kann die Abschätzung

$$\|\underline{R}_{i_k}\| = \|\sum_{l=k_0}^{k-1} \underline{C}_i \bar{A}_i^{k-l-1} \underline{B}_i \underline{z}_{i_l} \underline{z}_{i_l}^T\| \quad ,$$

$$\|\underline{R}_{i_k}\| \leq \sum_{l=k_0}^{k-1} \|\underline{C}_i\| \|\bar{A}_i^{k-l-1}\| \|\underline{B}_i\| \|\underline{z}_{i_l}\| \|\underline{z}_{i_l}^T\| \quad ,$$

$$\|\underline{R}_{i_k}\| \leq \sum_{l=k_0}^{k-1} c\, \beta^{k-l-1} \qquad (4.4.2\text{-}57)$$

mit der Ungleichung (4.4.2-11) für $i = 1, 2, ..., m$ angegeben werden. Wird anschließend die Grenzwertbetrachtung

$$\lim_{k \to \infty} \|\underline{R}_{i_k}\| \leq c \frac{1}{1-\beta} \quad , \quad i = 1, 2, ..., m \qquad (4.4.2\text{-}58)$$

mit der Ungleichung (4.4.2-57) durchgeführt, so ergibt sich mit

$$\|adj\, \underline{R}_{i_k}\| \leq c_1 \quad , \quad i = 1, 2, ..., m \qquad (4.4.2\text{-}59)$$

der Beweis des zweiten Teils. ∎

Für die Konvergenz des Parameter- und Zustandsfehlers folgt am Schluß der Analyse der

SATZ **4.4.2.G.** : *Bei hinreichender beschränkter Anregung ist der adaptive Mehrgrößenbeobachter, beschrieben durch die parametrisierte Darstellung des Kalman-Beobachters und die verallgemeinerte Parameteradaption, exponentiell stabil, d.h. die Norm des Parameterfehlers*

$$\|\tilde{\underline{\alpha}}_{i_k}\| \quad , \quad i = 1, 2, ..., m \tag{4.4.2-60}$$

und die Norm des Zustandsfehlers

$$\|\tilde{\underline{z}}_{i_k}\| \quad , \quad i = 1, 2, ..., m \tag{4.4.2-61}$$

konvergieren unter der Voraussetzung, daß die Systeme (4.3-7) bis (4.3-9) steuerbar sind und

$$Rang\, \underline{\tilde{C}}_i = (m + r)\, n_i + \sum_{l=0}^{i-1} l \quad , \quad i = 1, 2, ..., m \tag{4.4.2-62}$$

ist, mit dem Grad

$$\gamma := \max\{\lambda, \beta, \delta\} \tag{4.4.2-63}$$

exponentiell für $k \longrightarrow \infty$ gegen Null.
Der Grad γ wird aus den exponentiell stabilen Matrizen $\underline{K}_i$, $\underline{\bar{A}}_i$, $\underline{\Phi}_i$ mit den Ungleichungen

$$\|\underline{K}_i^{k-j}\| \leq c_1 \lambda^{k-j} \quad , c_1 > 0 \,, \quad \lambda \in [0, 1) \,, \tag{4.4.2-64}$$

$$\|\underline{\bar{A}}_i^{k-j}\| \leq c_2 \beta^{k-j} \quad , c_2 > 0 \,, \quad \beta \in [0, 1) \,, \tag{4.4.2-65}$$

$$\|\underline{\Phi}_{i(k,j)}\| \leq c_3 \delta^{k-j} \quad , c_3 > 0 \,, \quad \delta \in [0, 1) \tag{4.4.2-66}$$

und der Definition

$$\underline{\Phi}_{i(k,j)} := \begin{cases} \underline{\tilde{A}}_{i_{k-1}} \underline{\tilde{A}}_{i_{k-2}} \cdots \underline{\tilde{A}}_{i_j} \,, & \text{für alle } k > j \\ \underline{I} \quad , & \text{für alle } k = j \\ \text{nicht definiert} \,, & \text{für alle } k < j \end{cases} \tag{4.4.2-67}$$

für $i = 1, 2, ..., m$ berechnet.

BEWEIS: Mit den Lemmata **4.4.2.C** und **4.4.2.E** wurde die Existenz der Matrix $\underline{R}_{i_k}^{-1}$ bei beschränkter hinreichender Anregung des Eingangsvektors gezeigt, so daß die Definition (**4.4.1-5**) nach den Matrizen

$$\underline{G}_{i_k} = \left[\underline{I} - \underline{\tilde{A}}_{i_k}\right] \underline{R}_{i_k}^{-1} \quad , \quad i = 1, 2, ..., m \tag{4.4.2-68}$$

aufgelöst werden kann. Mit Lemma 4.4.2.F und den Definitionen (4.4.2-64) und (4.4.2-67) kann die Beschränktheit der Matrizen $\underline{G}_{i_k}$ mit der Ungleichung

$$\|\underline{G}_{i_k}\| \leq c \quad , \quad i = 1, 2, ..., m \tag{4.4.2-69}$$

nachgewiesen werden.
Wird die Lösung

$$\tilde{\underline{\alpha}}_{i_k} = \underline{\Phi}_{i_{(k,k_0)}} \tilde{\underline{\alpha}}_{i_{k_0}} + \sum_{j=k_0}^{k-1} \underline{\Phi}_{i_{(k,j+1)}} \tilde{\underline{\delta}}_{i_j} \quad ,$$
$$i = 1, 2, ..., m \tag{4.4.2-70}$$

der Differenzengleichung (4.4.1-7) betrachtet, so kann mit Bildung der Norm die Abschätzung

$$\|\tilde{\underline{\alpha}}_{i_k}\| \leq \|\underline{\Phi}_{i_{(k,k_0)}}\| \|\tilde{\underline{\alpha}}_{i_{k_0}}\| + \sum_{j=k_0}^{k-1} \|\underline{\Phi}_{i_{(k,j+1)}}\| \|\tilde{\underline{\delta}}_{i_j}\| \quad ,$$
$$i = 1, 2, ..., m \tag{4.4.2-71}$$

vollzogen werden. Mit den Ungleichungen (4.4.2-66) und (4.4.2-12) kann eine weitere Umformung

$$\|\tilde{\underline{\alpha}}_{i_k}\| \leq \delta^{k-k_0} c + \sum_{j=k_0}^{k-1} c_1 \delta^{k-j-1} \xi^{j-k_0} \quad , \quad i = 1, 2, ..., m \tag{4.4.2-72}$$

der Ungleichung (4.4.2-71) durchgeführt werden.
Die Definition (4.4.2-63) ermöglicht eine weitere Abschätzung

$$\|\tilde{\underline{\alpha}}_{i_k}\| \leq c \gamma^{k-k_0} + c_1 \sum_{j=k_0}^{k-1} \gamma^{k-1-k_0} \quad ,$$
$$\|\tilde{\underline{\alpha}}_{i_k}\| \leq c \gamma^{k-k_0} + c_2 \gamma^{k-k_0} \quad ,$$
$$\|\tilde{\underline{\alpha}}_{i_k}\| \leq c_3 \gamma^{k-k_0} \quad , \quad i = 1, 2, ..., m \quad , \tag{4.4.2-73}$$

die die exponentielle Konvergenz des Parameterfehlers gegen Null zeigt. Der zweite Teil des Beweises zeigt die exponentielle Konvergenz des Zustandsfehlers. Der Zustandsfehler

$$\tilde{\underline{x}}_{i_k} := \hat{\underline{x}}_{i_k} - \underline{x}_{i_k} \quad , \quad i = 1, 2, ..., m \tag{4.4.2-74}$$

eines Untersystems wird aus der Differenz des Beobachterzustandes

$$\hat{\underline{x}}_{i_k} = \underline{K}_i^{k-k_0}\,\hat{\underline{x}}_{i_{k_0}} + \sum_{j=1}^{m} \underline{P}_{ij_k}\,\hat{\underline{d}}_{ij_k} + \sum_{j=1}^{r} \underline{Q}_{ij_k}\,\hat{\underline{b}}_{ij_k} \quad , \qquad i = 1, 2, ..., m \qquad (4.4.2\text{-}75)$$

und des Systemzustandes

$$\underline{x}_{i_k} = \underline{K}_i^{k-k_0}\,\underline{x}_{i_{k_0}} + \sum_{j=1}^{m} \underline{P}_{ij_k}\,\underline{d}_{ij}^{*} + \sum_{j=1}^{r} \underline{Q}_{ij_k}\,\underline{b}_{ij}^{*} \quad , \qquad i = 1, 2, ..., m \quad , \quad (4.4.2\text{-}76)$$

die sich nach Gleichung (3.2-6) ergeben , entsprechend der Gleichung

$$\tilde{\underline{x}}_{i_k} = \underline{K}_i^{k-k_0}\,\tilde{\underline{x}}_{i_{k_0}} + \sum_{j=1}^{m} \underline{P}_{ij_k}\,(\hat{\underline{d}}_{ij_k} - \underline{d}_{ij}^{*}) + \sum_{j=1}^{r} \underline{Q}_{ij_k}\,(\hat{\underline{b}}_{ij_k} - \underline{b}_{ij}^{*}) \quad , \qquad i = 1, 2, ..., m \qquad (4.4.2\text{-}77)$$

gebildet. Mit Bildung der Norm über der Gleichung (4.4.2-77) kann die Abschätzung

$$\|\tilde{\underline{x}}_{i_k}\| \leq \|\underline{K}_i^{k-k_0}\|\,\|\tilde{\underline{x}}_{i_{k_0}}\| + \sum_{j=1}^{m} \|\underline{P}_{ij_k}\|\,\|\hat{\underline{d}}_{ij_k} - \underline{d}_{ij}^{*}\| + \sum_{j=1}^{r} \|\underline{Q}_{ij_k}\|\,\|\hat{\underline{b}}_{ij_k} - \underline{b}_{ij}^{*}\| \quad , \qquad i = 1, 2, ..., m \qquad (4.4.2\text{-}78)$$

angegeben werden. Aus Lemma 4.4.2.F folgt die Beschränkheit der Vektoren $\underline{z}_{i_k}$ und mit Definition (3.4-13) die Beschränkheit der Vektoren $\underline{v}_{ij_k}$ und $\underline{w}_{ij_k}$. Hieraus folgt mit beschränkten Transformationsmatrizen

$$\|\underline{E}_{i\nu}\| \leq c \quad , \quad i = 1, 2, ..., m \; , \; \nu = 1, 2, ..., n_i \qquad (4.4.2\text{-}79)$$

und der Verwendung der Gleichungen (3.3-21) und (3.3-22) die Beschränkheit der Vektoren $\underline{p}_{ij_\nu}$ und $\underline{q}_{ij_\nu}$. Mit den Definitionen (3.3-1) und (3.3-2) ergibt sich die Beschränkheit der Matrizen

$$\|\underline{P}_{ij_k}\| \leq c_1 \quad , \quad i,j = 1,2,...,m \tag{4.4.2-80}$$

und

$$\|\underline{Q}_{ij_k}\| \leq c_2 \quad , \quad i = 1,2,...,m \; , \; j = 1,2,...,r \quad . \tag{4.4.2-81}$$

Die Ungleichung (4.4.2-78) kann mit den Ungleichungen (4.4.2-80), (4.4.2-64) und (4.4.2-81), den Elementen $(\underline{\dot{d}}_{ij_k} - \underline{d}^*_{ij})$ und $(\underline{\dot{b}}_{ij_k} - \underline{b}^*_{ij})$ des Parameterfehlers (4.4.2-73) weiter

$$\|\underline{\tilde{x}}_{i_k}\| \leq \lambda^{k-k_0} c_3 + \sum_{j=1}^{m} c_1 \gamma^{k-k_0} + \sum_{j=1}^{r} c_2 \gamma^{k-k_0} \; , \tag{4.4.2-82}$$

$$\|\underline{\tilde{x}}_{i_k}\| \leq c_4 \gamma^{k-k_0} \quad , \quad i = 1,2,...,m$$

abgeschätzt werden.
Hiermit ist der Beweis des Satzes abgeschlossen. ∎

Mit diesem Satz ist die Konvergenz des Parameter- und Zustandsfehlers gegen Null gezeigt. Zur Parameteradaption werden die dynamischen Systeme mit den Beschreibungen (4.3-7) bis (4.3-9) und (4.3-10) bis (4.3-12), sowie das Parameteradaptionsgesetz (4.3-13) mit der Auslegung der Matrix $\underline{G}_{i_k}$ nach Gleichung (4.4.2-68) benötigt. Wie jedoch die Matrizen $\tilde{\underline{A}}_i$, $\underline{K}_i$, $\bar{\underline{A}}_i$, $\underline{B}_i$, $\underline{C}_i$ im einzelnen auszulegen sind, wird im folgenden Abschnitt erläutert.

4.5 Auslegung der Matrizen $\tilde{A}_i$, $\underline{K}_i$, $\bar{A}_i$, $\bar{B}_i$, $\bar{C}_i$

Zunächst werden für die Auslegung der Matrizen zwei Vorschläge diskutiert :
Im ersten Vorschlag wird eine in der Literatur vorhandene Auslegung der Matrizen vorgestellt, die eine exponentielle Konvergenz des Parameter- und Zustandsfehlers gegen Null mit Hilfe eines Vergessensfaktors gewährleistet.
Als Einschränkung muß genannt werden, daß eine optimale Wahl des Vergessensfaktors nicht möglich ist. Wird der Vergessensfaktor bei hinreichender beschränkter Anregung und beschränkter Rechengenauigkeit zu klein gewählt wird, so kann keine Konvergenz aufgrund der singulären Matrix $\underline{R}_{i_k}$ erreicht werden. Wird dieser zu groß gewählt, so konvergieren Parameter- und Zustandsfehler nicht hinreichend schnell.
Im zweiten Vorschlag wird eine neue Auslegung der Matrizen aufgrund der verallgemeinerten Parameteradaption vorgeschlagen, die eine exponentielle bis schrittoptimale Konvergenz des Parameter- und Zustandsfehlers erlaubt.

4.5.1 Sicherung der exponentiellen Konvergenz mit Hilfe eines Vergessensfaktors

Die Matrizen $\bar{A}_i$, $\bar{B}_i$, $\bar{C}_i$ werden anhand der Gleichungen

$$\bar{A}_i = \beta_i \underline{I} \quad , \quad \bar{A}_i \in R^{q_i x q_i} \, , \tag{4.5.1-1}$$

$$\bar{B}_i = \underline{I} \quad , \quad \bar{B}_i \in R^{q_i x q_i} \, , \tag{4.5.1-2}$$

$$\bar{C}_i = \underline{I} \quad , \quad \bar{C}_i \in R^{q_i x q_i} \, , \tag{4.5.1-3}$$

mit

$$q_i = (m+r)\, n_i + i - 1 \tag{4.5.1-4}$$

für $i = 1, 2, ..., m$ ausgelegt. Die Vergessensfaktoren β_i, für die gilt, daß $0 < \beta_i < 1$ ist, ergeben mit der Gleichung

$$\beta = \max_i \beta_i \quad , \quad i = 1, 2, ..., m \tag{4.5.1-5}$$

den für die Konvergenzgeschwindigkeit entscheidenden Faktor β.
Die Matrizen $\underline{K}_i$ und $\tilde{A}_{i_k}$ werden zusätzlich nach den Ungleichungen (4.4.2-64), (4.4.2-67) und (4.4.2-66) ausgelegt .

Die (q_i, q_i) dimensionale Matrix $\tilde{A}_{i_k}$ könnte dann zeitinvariant in der Gestalt

$$\tilde{A}_{i_k} := \begin{pmatrix} \sigma_{i1} & & & \\ & \sigma_{i2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_{iq_i} \end{pmatrix} \quad , \quad i = 1, 2, ..., m \qquad (4.5.1\text{–}6)$$

gewählt werden .

4.5.2 Auslegung der Matrizen für eine exponentielle bis schrittoptimale Konvergenz

Die Matrizen $\bar{A}_i$, $\bar{B}_i$, $\bar{C}_i$ werden gemäß den Gleichungen

$$\bar{A}_i = \begin{pmatrix} \underline{0} & \underline{I} & \underline{0} & \dots & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{I} & \dots & \underline{0} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \dots & \underline{I} \\ \bar{\beta}_i \underline{I} & \underline{0} & \underline{0} & \dots & \underline{0} \end{pmatrix} \quad , \quad \bar{A}_i \in R^{q_i^2 x q_i^2} \quad , \qquad (4.5.2\text{–}1)$$

$$\bar{B}_i = \begin{pmatrix} \underline{0} \\ \underline{0} \\ \vdots \\ \underline{0} \\ \underline{I} \end{pmatrix} \quad , \quad \bar{B}_i \in R^{q_i^2 x q_i} \quad , \qquad (4.5.2\text{–}2)$$

$$\bar{C}_i = \begin{pmatrix} \underline{I} & \underline{I} & \dots & \underline{I} \end{pmatrix} \quad , \quad \bar{C}_i \in R^{q_i x q_i^2} \quad , \qquad (4.5.2\text{–}3)$$

mit den $(q_i x q_i)$ dimensionalen Einheitsmatrizen $\underline{I}$ und Nullmatrizen $\underline{0}$, für $i = 1, 2, ..., m$ gewählt. Zusätzlich werden die Matrizen $\underline{K}_i$ und $\tilde{A}_{i_k}$ entsprechend den Ungleichungen (4.4.2-64) und (4.4.2-66) unter Verwendung von Definition (4.4.2-6) ausgelegt. Der Faktor $\bar{\beta}_i$ kann zwischen Null und Eins gewählt werden, darf aber nicht gleich eins sein. Eine schrittoptimale Konvergenz des Parameter- und Zustandsfehlers wird bei nilpotenter Auslegung der Matrizen $\underline{K}_i$, $\bar{A}_i$ und $\tilde{A}_{i_k}$ mit

$$\underline{k}_{ii} = \underline{0} \quad , \tag{4.5.2-4}$$

$$\bar{\beta} = 0 \quad , \tag{4.5.2-5}$$

$$\tilde{A}_{i_k} = \underline{0} \quad , \quad \text{für alle } k \in [k_0, \infty] \tag{4.5.2-6}$$

für $i = 1, 2, ..., m$ erreicht.
Betrachtet man den Ausgangsfehler

$$\tilde{f}_{i_k} = \underline{c}_{ii}^T \underline{K}_i^{k-k_0} \tilde{\underline{z}}_{i_{k_0}} \quad , \quad i = 1, 2, ..., m \tag{4.5.2-7}$$

nach der Gleichung (4.4.2-4) mit der Definition (4.4.2-74) , so ist dieser Null für alle $k - k_0 \geq n_i$. Die Eingangsgröße

$$\tilde{\underline{s}}_{i_k} = -\underline{G}_{i_k} \bar{C}_i \sum_{l=k_0}^{k-1} \bar{A}_i^{k-l-1} \bar{B}_i \underline{z}_{i_l} \tilde{f}_{i_l} \quad , \quad i = 1, 2, ..., m \tag{4.5.2-8}$$

der Parameterfehlergleichung (4.4.1-7) kann mit den beschränkten Matrizen $\underline{G}_{i_k}$, $\bar{C}_i$, $\bar{B}_i$ und den Vektoren $\underline{z}_{i_l}$ durch

$$\|\tilde{\underline{s}}_{i_k}\| \leq c \sum_{l=k_0}^{k-1} \|\bar{A}_i^{k-l-1}\| \, \|\tilde{f}_{i_l}\| \quad ,$$

$$\|\tilde{\underline{s}}_{i_k}\| \leq c \sum_{\substack{l=k-q_i \\ l \geq k_0}}^{k-1} \|\tilde{f}_{i_l}\| \quad , \quad i = 1, 2, ..., m \tag{4.5.2-9}$$

mit dem Faktor $\bar{\beta} = 0$ abgeschätzt werden. Hieraus folgt, daß die Eingangsgröße $\tilde{\underline{s}}_{i_k}$ in

$$q_i = n_i + (m + r)\, n_i + i - 1 \tag{4.5.2-10}$$

Schritten für $i = 1, 2, ..., m$ gegen Null konvergiert. Der Parameterfehler $\tilde{\underline{\alpha}}_{i_k}$ ist nach Gleichung (4.4.1-7) mit Gleichung (4.5.2-6) dann im folgenden Schritt gleich null.
Betrachtet man den Zustandsfehler laut Gleichung (4.4.2-78), so konvergiert dieser zusammen mit dem Parameterfehler gegen Null.
Zusammenfassend kann angegeben werden , daß bei der schrittoptimalen Auslegung Parameter- und Zustandsfehler in

$$q_g = \max_i \left[(m + r + 1)\, n_i + i - 1\right] \quad , \quad i = 1, 2, ..., m \tag{4.5.2-11}$$

Schritten gegen Null konvergieren.

5.0 Zusammenstellung des Beobachteralgorithmus

Auf den folgenden Seiten ist der vollständige Algorithmus unter der laufenden Nummerierung 1,...,13 zusammengestellt.

Unter Nummer 1 sind sämtliche Eingabedaten zusammengefaßt. Mit Hilfe dieser Eingabedaten werden unter den folgenden Punkten die Matrizen $\underline{K}_i$ laut Definition (3.1-3) und die Transformationsmatrizen $\underline{E}_{i_\nu}$ gemäß Gleichung (3.3-23) berechnet.

Die Anfangswerte der dynamischen Systeme mit den Beschreibungen (3.3-24), (3.3-25) und (3.3-26), (3.3-27) werden unter Nummer 4.0 auf Null gesetzt.

Die Startwerte $\underline{R}_{i_0}$ und $\underline{r}_{i_0}$ werden laut den Gleichungen (4.3-9) und (4.3-12) zugewiesen.

Der iterative Teil des Algorithmus beginnt mit der Realisierung der Differenzengleichungen (3.3-24) und (3.3-26). Diese dynamischen Systeme werden durch die Ein- und Ausgangsgrößen des zu rekonstruierenden Mehrgrößensystems angeregt.

Eine folgende Transformation der Vektoren $\underline{v}_{ij_k}$ und $\underline{w}_{ij_k}$ auf die Matrizen $\underline{P}_{ij_k}$ und $\underline{Q}_{ij_k}$ unter Nummer 7.0 wird durch die Gleichungen (3.3-21) und (3.3-22) mit den Definitionen (3.3-1) und (3.3-2) beschrieben.

Die Zustände $\hat{\underline{z}}_{i_k}$ werden mit einigen Komponenten der Parametervektoren $\hat{\underline{\alpha}}_{i_k}$ gemäß den Definitionen (3.4-14) und (4.0-3) nach Gleichung (3.2-6) rekonstruiert.

Die restlichen Komponenten der Parametervektoren $\hat{\underline{\alpha}}_{i_k}$ werden zur Berechnung der Ausgangsgrößen $\hat{y}_{i_k}$ des Beobachters benötigt.

Eine Zusammenfassung der Daten für die Parameteradaption erfolgt im im Punkt 10.

Im Schritt 11 werden die Parameter durch die dynamischen Systeme mit den Beschreibungen (4.3-7) bis (4.3-9) und (4.3-10) bis (4.3-12) und dem Parameteradaptionsgesetz (4.3-13) mit der Auslegung der Matrix $\underline{G}_{i_k}$ nach Gleichung (4.4.2-68) adaptiert.

Die Streckenparameter , die in den Matrizen $\hat{\underline{A}}_{i_k}$ und $\hat{\underline{B}}_{i_k}$ laufend adaptiert werden, werden mit den Definitionen (3.1-10), (3.1-16) und (3.1-20) unter Punkt 12 berechnet.

Am Schluß des iterativen Teils werden die Parameter und Zustände ausgegeben.

1.0 Eingabedaten

1.1 A-priori-Kenntnisse des linearen Systems

Anzahl der Eingänge	r.
Anzahl der Ausgänge	m.
Beobachtbarkeitsindices	$n_1, n_2, ..., n_m$.

1.2 Anfangswerte des Beobachters

Anfangszustände	$\hat{\underline{x}}_{i_0} \in R^{n_i}$.
Anfangsparameter mit $q_i = (m+r)n_i + i - 1$	$\hat{\underline{\alpha}}_{i_0} \in R^{q_i}$.

1.3 Parameter für die Konvergenzgeschwindigkeit

Koeffizientenvektoren der exponentiell stabilen Matrizen.	$\underline{k}_{ii} \in R^{n_i}$
Exponentiell stabile Matrizen der Parameterdifferenzengleichungen.	$\tilde{A}_{i_k} \in R^{q_i x q_i}$
Exponentiell stabile Matrizen mit Auslegung nach Gleichung (4.5.1-1) oder Gleichung (4.5.2-1) .	$\bar{A}_i$
Beschränkte Matrizen mit Auslegung nach Gleichung (4.5.1-2) und Gleichung (4.5.1-3) oder nach und Gleichung (4.5.2-3) Gleichung (4.5.2-2).	$\underline{B}_i$, $\underline{C}_i$

2.0 Bildung der Matrizen $\underline{K}_i$:

$$\underline{K}_i = \begin{pmatrix} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \underline{k}_{ii} & \vdots & \ddots & & \vdots \\ & 0 & 0 & \dots & 1 \\ & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

3.0 Berechnung der Transformationsmatrizen $\underline{E}_{i\nu}$:

$$adj[z\underline{I} - \underline{K}_i]\underline{e}_\nu = \underline{E}_{i\nu} \begin{pmatrix} z^{n_i-1} \\ z^{n_i-2} \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

für $i = 1, 2, \dots, m$, $\nu = 1, 2, \dots, n_i$.

4.0 Setzen der Anfangswerte der dyn. Systeme $\underline{v}_{ij}$, $\underline{w}_{ij}$:

$\underline{v}_{ij_0} = \underline{0}$, $\underline{v}_{ij_k} \in R^{n_i}$, $i = 1, 2, \dots, m$,

$\underline{w}_{ij_0} = \underline{0}$, $\underline{w}_{ij_k} \in R^{n_i}$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, r$.

5.0 Setzen der Anfangswerte der dyn. Systeme $\bar{\underline{R}}_i$, $\bar{\underline{r}}_i$:

$\bar{\underline{R}}_{i_0} = \underline{0}$, $\bar{\underline{r}}_{i_0} = \underline{0}$.

Bei Auslegung nach Kapitel 4.5.1 : $\bar{\underline{R}}_{i_k} \in R^{q_i x q_i}$, $\bar{\underline{r}}_{i_k} \in R^{q_i}$.
Bei Auslegung nach Kapitel 4.5.2 : $\bar{\underline{R}}_{i_k} \in R^{q_i^2 x q_i}$, $\bar{\underline{r}}_{i_k} \in R^{q_i^2}$.

Iterativer Teil

6.0 Dynamische Systeme $\underline{v}_{ij}$, $\underline{w}_{ij}$:

$$\underline{v}_{ij_{k+1}} = \underline{K}_i^T \underline{v}_{ij_k} + \underline{e}_1 y_{j_k} \quad , \quad i,j = 1,2,...,m \quad ,$$
$$\underline{w}_{ij_{k+1}} = \underline{K}_i^T \underline{w}_{ij_k} + \underline{e}_1 u_{j_k} \, , \quad i = 1,2,...,m \, , \; j = 1,2,...,r \quad .$$

7.0 Transformation der Vektoren $\underline{v}_{ij}$, $\underline{w}_{ij}$ auf die Matrizen $\underline{P}_{ij}$, $\underline{Q}_{ij}$:

$$\underline{P}_{ij_k} = \left(\; \underline{E}_{i1}\underline{v}_{ij_k} \;\; \underline{E}_{i2}\underline{v}_{ij_k} \;\; \cdots \;\; \underline{E}_{in_i}\underline{v}_{ij_k} \; \right) ,$$
$i,j = 1,2,...,m$,

$$\underline{Q}_{ij_k} = \left(\; \underline{E}_{i1}\underline{w}_{ij_k} \;\; \underline{E}_{i2}\underline{w}_{ij_k} \;\; \cdots \;\; \underline{E}_{in_i}\underline{w}_{ij_k} \; \right) ,$$
$i = 1,2,...,m$, $j = 1,2,...,r$.

8.0 Zustände rekonstruieren :

$$\hat{\underline{x}}_{i_k} = \underline{K}_i^k \, \hat{\underline{x}}_{i_0} + \sum_{j=1}^{m} \underline{P}_{ij_k} \hat{\underline{d}}_{ij_k} + \sum_{j=1}^{r} \underline{Q}_{ij_k} \hat{\underline{b}}_{ij_k} \quad ,$$

mit $\underline{\hat{\alpha}}_{i_k}^T = \left(\; -\hat{s}_{i1} \;\; \cdots \;\; -\hat{s}_{i,i-1} \quad \underline{\hat{d}}_{i1}^T \;\; \cdots \;\; \underline{\hat{d}}_{im}^T \quad \underline{\hat{b}}_{i1}^T \;\; \cdots \;\; \underline{\hat{b}}_{ir}^T \; \right)_k$,

für $i = 1,2,...,m$.

9.0 Berechnung der Ausgangsgrößen $\hat{y}_{i_k}$:

$$\hat{y}_{i_k} = \underline{c}_{ii}^T \hat{\underline{x}}_{i_k} - \sum_{\substack{j=1 \\ j<i}}^{i-1} \hat{s}_{ij_k} \, y_{j_k} \quad , \quad i = 1,2,...,m \, .$$

10.0 Zusammenfassung der Daten für die Parameteradaption :

$$\underline{z}_{i_k}^T = \left(y_1 \;\; \cdots \;\; y_{i-1} \quad \underline{v}_{i1}^T \;\; \cdots \;\; \underline{v}_{im}^T \quad \underline{w}_{i1}^T \;\; \cdots \;\; \underline{w}_{ir}^T \right)_k \quad ,$$

$$\hat{f}_{i_k} = \underline{c}_{ii}^T \underline{K}_i^k \hat{\underline{x}}_{i_0} \quad , \quad i = 1,2,...,m \, .$$

11.0 Parameteradaption :

$$\underline{\bar{R}}_{i_{k+1}} = \underline{\bar{A}}_i \, \underline{\bar{R}}_{i_k} + \underline{\bar{B}}_i \underline{z}_{i_k} \underline{z}_{i_k}^T \quad ,$$

$$\underline{R}_{i_k} = \underline{\bar{C}}_i \, \underline{\bar{R}}_{i_k} \quad ,$$

$$\underline{\bar{r}}_{i_{k+1}} = \underline{\bar{A}}_i \, \underline{\bar{r}}_{i_k} + \underline{\bar{B}}_i \underline{z}_{i_k} [\hat{f}_{i_k} - y_{i_k}] \quad ,$$

$$\underline{r}_{i_k} = \underline{\bar{C}}_i \, \underline{\bar{r}}_{i_k} \quad ,$$

$$\underline{G}_{i_k} = [\underline{I} - \underline{\tilde{A}}_{i_k}] \, \underline{R}_{i_k}^{-1} \quad ,$$

$$\underline{\hat{\alpha}}_{i_{k+1}} = \underline{\hat{\alpha}}_{i_k} - \underline{G}_{i_k} [\underline{R}_{i_k} \underline{\hat{\alpha}}_{i_k} + \underline{r}_{i_k}] ,$$

$i = 1, 2, ..., m$.

12.0 Rekonstruierte Systemparameter berechnen :

$$\underline{\hat{S}}_k^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hat{s}_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \hat{s}_{m1} & \hat{s}_{m2} & \hat{s}_{m3} & \dots & \hat{s}_{m,m-1} & 1 \end{pmatrix}_k ,$$

$$\underline{\hat{S}}_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hat{c}_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \hat{c}_{m1} & \hat{c}_{m2} & \hat{c}_{m3} & \dots & \hat{c}_{m,m-1} & 1 \end{pmatrix}_k ,$$

$$\left(\underline{\hat{a}}_{i1} \dots \underline{\hat{a}}_{i,i-1} \; (\underline{\hat{a}}_{ii} - \underline{k}_{ii}) \; \underline{\hat{a}}_{i,i+1} \dots \underline{\hat{a}}_{im} \right)_k = \left(\underline{\hat{d}}_{i1} \underline{\hat{d}}_{i2} \dots \underline{\hat{d}}_{im} \right)_k \underline{\hat{S}}_k .$$

13.0 Ausgabe der Parameter und Zustände :

$$\hat{\underline{a}}_{i1_k}, \hat{\underline{a}}_{i2_k}, \ldots, \hat{\underline{a}}_{im_k} \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, m ,$$

$$\hat{\underline{b}}_{i1_k}, \hat{\underline{b}}_{i2_k}, \ldots, \hat{\underline{b}}_{ir_k} \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, m ,$$

$$\hat{\underline{c}}_{ij_k} \quad , \quad i > j \, , \; i, j = 1, 2, \ldots, m ,$$

$$\hat{\underline{x}}_{1_k}, \hat{\underline{x}}_{2_k}, \ldots, \hat{\underline{x}}_{m_k} \quad .$$

5.1 Bemerkungen zur Berechnung der inversen $\underline{R}_{i_k}^{-1}$

Bei der Parameteradaption, siehe Abschnitt 5.0 Punkt 11, wurde die Matrix $\underline{R}_{i_k}$ zur Berechnung der Parameter invertiert. Die Invertierung von Matrizen bereitet oft numerische Probleme. Aus diesem Grund werden die Gleichungen

$$\underline{G}_{i_k} = \left[\underline{I} - \tilde{\underline{A}}_{i_k}\right] \underline{R}_{i_k}^{-1} \quad , \tag{5.1-1}$$

$$\hat{\underline{\alpha}}_{i_{k+1}} = \hat{\underline{\alpha}}_{i_k} - \underline{G}_{i_k} \left[\underline{R}_{i_k} \hat{\underline{\alpha}}_{i_k} + \underline{r}_{i_k}\right] \quad , \tag{5.1-2}$$

umgeformt. Hierzu wird die Gl.(5.1-1) in die Gl.(5.1-2) eingesetzt:

$$\hat{\underline{\alpha}}_{i_{k+1}} = \hat{\underline{\alpha}}_{i_k} - \left[\underline{I} - \tilde{\underline{A}}_{i_k}\right] \left[\hat{\underline{\alpha}}_{i_k} + \underline{R}_{i_k}^{-1} \underline{r}_{i_k}\right] \quad . \tag{5.1-3}$$

Mit der Definition

$$\underline{g}_{i_k} := \underline{R}_{i_k}^{-1} \underline{r}_{i_k} \tag{5.1-4}$$

kann die Gl.(5.1-3) durch die Gleichungen

$$\underline{r}_{i_k} = \underline{R}_{i_k} \underline{g}_{i_k} \quad , \tag{5.1-5}$$

$$\hat{\underline{\alpha}}_{i_{k+1}} = \tilde{\underline{A}}_{i_k} \hat{\underline{\alpha}}_{i_k} - \left[\underline{I} - \tilde{\underline{A}}_{i_k}\right] \underline{g}_{i_k} \tag{5.1-6}$$

beschrieben werden. Die Gleichungen (5.1-1) und (5.1-2) sind jetzt in die Beziehungen (5.1-6) und (5.1-7) ohne Inversion der Matrix $\underline{R}_{i_k}$ umgeformt worden.
Die Inversion der Matrix $\underline{R}_{i_k}$ ist somit auf das numerisch stabilere Verfahren zum Lösen des Gleichungssystems (5.1-6) zurückgeführt worden.

6.0 Numerisches Beispiel

In diesem Kapitel wird die Parameter- und die Zustandsadaption an einem Beispiel graphisch veranschaulicht.
Hierzu wird im folgenden Abschnitt eine genaue Aufgabenstellung und das zu untersuchende System angegeben. Im anschließenden Abschnitt 6.2 wird der adaptive Beobachteralgorithmus für das beschriebene System dargestellt. Die hinreichende beschränkte Anregung des Systems zur Sicherung der Konvergenz wird im Abschnitt 6.3 behandelt.
Im letzten Abschnitt werden die Simulationsergebnisse graphisch dargestellt und diskutiert.

6.1 Aufgabenstellung und Systembeschreibung

Um den adaptiven Beobachteralgorithmus deutlicher zu demonstrieren, werden die Parameter und Zustände mit unterschiedlichen Konvergenzgeschwindigkeiten rekonstruiert.
Hierzu wird das Mehrgrößensystem dritter Ordnung mit einem Eingang und zwei Ausgängen in der folgenden Zustandsbeschreibung

$$\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ -- \\ x_{21} \end{pmatrix}_{k+1} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11_1} & 1 & & a_{12_1} \\ a_{11_2} & 0 & & a_{12_2} \\ -- & -- & & -- \\ a_{21_1} & 0 & & a_{22_1} \end{array}\right) \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ -- \\ x_{21} \end{pmatrix}_k + \begin{pmatrix} b_{11_1} \\ b_{11_2} \\ -- \\ b_{21_1} \end{pmatrix} u_{1_k} \quad , \quad \underline{x}_0 = \begin{pmatrix} 0.0 \\ 1.0 \\ -- \\ 0.0 \end{pmatrix} \quad , \tag{6.0-1}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ -- \\ y_2 \end{pmatrix}_k = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ -- & -- & -- \\ c_{21} & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ -- \\ x_{21} \end{pmatrix}_k \quad . \tag{6.0-2}$$

in der Identifikationsnormalform eingeführt.
Die Qualität des Algorithmus wird durch eine sprungförmige Änderung der Systemparameter demonstriert. Im eingeschwungenen Zustand des adaptiven Beobachters werden die Systemparameter von den Werten in der Spalte I der Tabelle 6.1.a

Parameter	I	II
a_{11_1}	0.5	0.4167
a_{11_2}	0.25	0.1667
a_{12_1}	2.0	1.0000
a_{12_2}	0.1	0.1250
b_{11_1}	1.0	0.5550
b_{11_2}	5.6 vorgegeben	5.6 vorgegeben
a_{21_1}	-0.25	-0.3571
a_{22_1}	0.5	-1.0000
b_{21_1}	1.0	1.1111
c_{21}	0.66	0.9428

Tabelle 6.1.a

sprungförmig auf die Werte in der Spalte II geschaltet. Der Parameter $b_{11_2} = 5.60$ wird fest vorgegeben, so daß sich die Parameteradaption für das erste Untersystem um eine Ordnung reduziert. Das Beispiel wird ausschließlich auf die Auslegung der Matrizen $\tilde{A}_i$, $\underline{K}_i$, $\bar{A}_i$, $\bar{B}_i$, $\bar{C}_i$ nach Kapitel 4.5.2 bezogen.
In den Simulationsläufen werden folgende Parameter verändert:

Simulationslauf	Nr.1	Nr.2
Kurvenbezeichung	$\square$	Δ
Konvergenz	exponentiell	schrittoptimal
$\underline{k}_{11}^T$	$[0.2\vert -0.01]$	$[0.00\vert 0.00]$
k_{22}	0.10	0.00
$\bar{\beta}_1$	0.15	0.00
$\bar{\beta}_2$	0.25	0.00
$\tilde{\underline{A}}_1 = \sigma_1 \underline{I}$	$\sigma_1 = 0.15$	$\sigma_1 = 0.00$
$\tilde{\underline{A}}_2 = \sigma_2 \underline{I}$	$\sigma_2 = 0.25$	$\sigma_2 = 0.00$

Tabelle 6.1.b

Anhand dieser Aufgabenstellung wird der Algorithmus im folgenden Abschnitt zusammengestellt.

6.2 Beobachteralgorithmus

Analog zum Kapitel 5.0 wird der Beobachteralgorithmus mit zum Teil konkreten Zahlenwerten unter laufender Nummerierung 1,2,...,13 zusammengestellt:

1.0 Eingabedaten

1.1 A-priori-Kenntnisse des linearen Systems

Anzahl der Eingänge	$r = 1$.
Anzahl der Ausgänge	$m = 2$.
Beobachtbarkeitsindices	$n_1 = 2,\ n_2 = 1$.

1.2 Anfangswerte des Beobachters

Anfangszustände	$\hat{\underline{x}}_{1_0} = \underline{0},\ \hat{\underline{x}}_{1_k} \in R^2$, $\hat{x}_{2_0} = 0,\ \hat{x}_{2_k} \in R^1$.
Anfangsparameter mit $q_1 = 5\ , q_2 = 4$.	$\hat{\underline{\alpha}}_{1_0} = \underline{0}\ ,\ \hat{\underline{\alpha}}_{1_k} \in R^5$, $\hat{\underline{\alpha}}_{2_0} = \underline{0}\ ,\ \hat{\underline{\alpha}}_{2_k} \in R^4$

1.3 Parameter für die Konvergenzgeschwindigkeit

Die Koeffizientenvektoren der stabilen Matrizen $\underline{K}_1$, K_2. werden laut Tabelle 6.1.b gewählt.	$\underline{k}_{11} \in R^2$, $k_{22} \in R^1$

Die Systemmatrizen

$$\tilde{A}_1 = \sigma_1 \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \tilde{A}_1 \in R^{5x5} \quad ,$$

und

$$\tilde{A}_2 = \sigma_2 \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \tilde{A}_2 \in R^{4x4}$$

der Parameterfehlergleichungen werden mit den Faktoren σ_1, σ_2 entsprechend der Tabelle 6.1.b gewählt.
Die Systemmatrizen

$$\bar{A}_1 = \begin{pmatrix} \underline{0} & \underline{I} & \underline{0} & \dots & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{I} & \dots & \underline{0} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \dots & \underline{I} \\ \bar{\beta}_1 \underline{I} & \underline{0} & \underline{0} & \dots & \underline{0} \end{pmatrix} \quad , \quad \bar{A}_1 \in R^{25x25} \quad , \quad \underline{I} \in R^{5x5} \quad , \quad \underline{0} \in R^{5x5} \quad ,$$

und

$$\bar{A}_2 = \begin{pmatrix} \underline{0} & \underline{I} & \underline{0} & \dots & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{I} & \dots & \underline{0} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \dots & \underline{I} \\ \bar{\beta}_2 \underline{I} & \underline{0} & \underline{0} & \dots & \underline{0} \end{pmatrix} \quad , \quad \bar{A}_1 \in R^{16x16} \quad , \quad \underline{I} \in R^{4x4} \quad , \quad \underline{0} \in R^{4x4} \quad ,$$

sowie die Eingangsmatrizen

$$\bar{B}_1 = \begin{pmatrix} \underline{0} \\ \underline{0} \\ \vdots \\ \underline{0} \\ \underline{I} \end{pmatrix} \quad , \quad \bar{B}_1 \in R^{25x5} \quad , \quad \underline{I} \in R^{5x5} \quad , \quad \underline{0} \in R^{5x5}$$

und

$$\underline{\bar{B}}_2 = \begin{pmatrix} \underline{0} \\ \underline{0} \\ \vdots \\ \underline{0} \\ \underline{I} \end{pmatrix} \quad , \quad \underline{\bar{B}}_2 \in R^{16x4} \quad , \quad \underline{I} \in R^{4x4} \quad , \quad \underline{0} \in R^{4x4}$$

und die Ausgangsmatrizen

$$\underline{\bar{C}}_1 = \begin{pmatrix} \underline{I} & \underline{I} & \dots & \underline{I} \end{pmatrix} \quad , \quad \underline{\bar{C}}_1 \in R^{5x25} \quad , \quad \underline{I} \in R^{5x5}$$

und

$$\underline{\bar{C}}_2 = \begin{pmatrix} \underline{I} & \underline{I} & \dots & \underline{I} \end{pmatrix} \quad , \quad \underline{\bar{C}}_2 \in R^{4x16} \quad , \quad \underline{I} \in R^{4x4}$$

werden entsprechend der Auslegung im Kapitel 4.5.2 mit den Faktoren $\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2$ laut Tabelle 6.1.b berechnet.

2.0 Bildung der Matrizen $\underline{K}_i$:

Die Matrizen $\underline{K}_1$ und K_2 haben unterschiedliche Werte für die Simulationsläufe. Für den ersten Simulationslauf ergeben sich die Matrizen

$$\underline{K}_1 = \begin{pmatrix} 0.20 & 1 \\ 0.10 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad K_2 = \begin{pmatrix} 0.1 \end{pmatrix} \quad .$$

Für den zweiten Simulationslauf ergeben sich die Matrizen

$$\underline{K}_1 = \begin{pmatrix} 0.00 & 1 \\ 0.00 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } K_2 = \begin{pmatrix} 0.00 \end{pmatrix} \quad .$$

Aufgrund von $n_2 = 1$ entarten die Matrizen und Vektoren für das zweite Untersystem oft zu Skalaren.

3.0 Berechnung der Transformationsmatrizen $\underline{E}_{i\nu}$:

Die Transformationsmatrizen

$$\underline{E}_{11} = \begin{pmatrix} 1.00 & 0.00 \\ 0.00 & -0.01 \end{pmatrix} \quad , \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0.00 & 1.00 \\ 1.00 & -0.20 \end{pmatrix} \quad ,$$

$$E_{21} = \begin{pmatrix} 1.00 \end{pmatrix}$$

werden für den ersten Simulationslauf und die Transformationsmatrizen

$$\underline{E}_{11} = \begin{pmatrix} 1.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 \end{pmatrix} \quad , \quad \underline{E}_{12} = \begin{pmatrix} 0.00 & 1.00 \\ 1.00 & 0.00 \end{pmatrix} \quad ,$$
$$E_{21} = \begin{pmatrix} 0.00 \end{pmatrix}$$

für den zweiten Simulationslauf benötigt.

4.0 Setzen der Anfangswerte der dynamischen Systeme $\underline{v}_{ij}, \underline{w}_{ij}$:

$$\underline{v}_{11_0} = \underline{0} \quad , \quad \underline{v}_{12_0} = \underline{0} \quad , \quad \underline{w}_{11_0} = \underline{0}$$

mit $\underline{v}_{11_k}, \underline{v}_{12_k}, \underline{w}_{11_k} \in R^2$

$$v_{21_0} = 0 \quad , \quad v_{22_0} = 0 \quad , \quad w_{21_0} = 0$$

mit $v_{21_k}, v_{22_k}, w_{21_k} \in R^1$.

5.0 Setzen der Anfangswerte der dynamischen Systeme $\bar{\underline{R}}_i, \bar{\underline{r}}_i$:

$$\bar{\underline{R}}_{1_0} = \underline{0} \quad , \quad \bar{\underline{R}}_{1_k} \in R^{25x5} \quad ,$$
$$\bar{\underline{R}}_{2_0} = \underline{0} \quad , \quad \bar{\underline{R}}_{2_k} \in R^{16x4} \quad ,$$

$$\bar{\underline{r}}_{1_0} = \underline{0} \quad , \quad \bar{\underline{r}}_{1_k} \in R^{25} \quad ,$$
$$\bar{\underline{r}}_{2_0} = \underline{0} \quad , \quad \bar{\underline{r}}_{1_k} \in R^{16} \quad .$$

6.0 Dynamische Systeme $\underline{v}_{ij}, \underline{w}_{ij}$:

$$\underline{v}_{11_{k+1}} = \underline{K}_1^T \underline{v}_{11_k} + \underline{e}_1 y_{1_k} \quad ,$$
$$\underline{v}_{12_{k+1}} = \underline{K}_1^T \underline{v}_{12_k} + \underline{e}_1 y_{2_k} \quad ,$$

$$\underline{w}_{11_{k+1}} = \underline{K}_1^T \underline{w}_{11_k} + \underline{e}_1 u_{1_k} \quad ,$$

$$v_{21_{k+1}} = K_2 v_{21_k} + y_{1_k} \quad ,$$
$$v_{22_{k+1}} = K_2 v_{22_k} + y_{2_k} \quad ,$$

$$w_{21_{k+1}} = K_2 w_{21_k} + u_{1_k} \quad ,$$

7.0 Transformation der Vektoren $\underline{v}_{ij}, \underline{w}_{ij}$ auf die Matrizen $\underline{P}_{ij}, \underline{Q}_{ij}$:

$$\underline{P}_{11_k} = \left[\underline{E}_{11}\underline{v}_{11_k} \quad \underline{E}_{12}\underline{v}_{11_k}\right] \quad ,$$
$$\underline{P}_{12_k} = \left[\underline{E}_{11}\underline{v}_{12_k} \quad \underline{E}_{12}\underline{v}_{12_k}\right] \quad ,$$

$$\underline{Q}_{11_k} = \left[\underline{E}_{11}\underline{w}_{11_k} \quad \underline{E}_{12}\underline{w}_{11_k}\right] \quad ,$$

$$P_{21_k} = \left[E_{21} v_{21_k}\right] \quad ,$$
$$P_{22_k} = \left[E_{21} v_{22_k}\right] \quad ,$$

$$Q_{21_k} = \left[E_{21} w_{21_k}\right] \quad ,$$

8.0 Zustände rekonstruieren :

$$\hat{\underline{x}}_{1_k} = \underline{K}_1^k \hat{\underline{x}}_{1_0} + \underline{P}_{11_k} \hat{\underline{d}}_{11_k} + \underline{P}_{12_k} \hat{\underline{d}}_{12_k} + \underline{Q}_{11_k} \hat{\underline{b}}_{11_k} \quad ,$$

$$\hat{x}_{2_k} = K_2^k \hat{x}_{2_0} + P_{21_k} \hat{d}_{21_k} + P_{22_k} \hat{d}_{22_k} + Q_{21_k} \hat{b}_{21_k}$$

mit den Parametern

$$\hat{\underline{\alpha}}_{1_k}^T = \left(\hat{\underline{d}}_{11}^T \quad \hat{\underline{d}}_{12}^T \quad \hat{b}_{11_1} \quad b_{11_2} \right)_k \quad ,$$

$$\hat{\underline{\alpha}}_{2_k}^T = \left(-\hat{s}_{21} \quad \hat{d}_{21} \quad \hat{d}_{22} \quad \hat{b}_{21} \right)_k \quad .$$

9.0 Ausgangsgrößen des Beobachters berechnen :

$$\hat{y}_{1_k} = \left[1 \quad 0 \right] \hat{\underline{x}}_{1_k} \quad ,$$

$$\hat{y}_{2_k} = \left[1 \right] \hat{x}_{2_k} - \hat{s}_{21_k} \quad y_{1_k} \quad .$$

10.0 Zusammenfassung der Daten für die Parameteradaption :

$$\underline{z}_{1_k}^T = \left(\underline{v}_{11}^T \quad \underline{v}_{12}^T \quad w_{11_1} \right)_k \quad ,$$

$$\underline{z}_{2_k}^T = \left(y_1 \quad v_{21} \quad v_{22} \quad w_{21} \right)_k \quad ,$$

$$\hat{f}_{1_k} = \left[1 \quad 0 \right] \quad \underline{K}_1^k \quad \hat{\underline{x}}_{1_0} \quad ,$$

$$\hat{f}_{2_k} = \left[1 \right] \quad K_2^k \quad \hat{x}_{2_0} \quad .$$

11.0 Parameteradaption :

Die Parameteradaption erfolgt für das erste Untersystem mit den Gleichungen

$$\begin{aligned}
\underline{\bar{R}}_{1_{k+1}} &= \bar{\underline{A}}_1 \underline{\bar{R}}_{1_k} + \bar{\underline{B}}_1 \underline{z}_{1_k} \underline{z}_{1_k}^T \quad , \\
\underline{R}_{1_k} &= \bar{\underline{C}}_1 \underline{\bar{R}}_{1_k} \quad , \\
\underline{\bar{r}}_{1_{k+1}} &= \bar{\underline{A}}_1 \underline{\bar{r}}_{1_k} + \bar{\underline{B}}_1 \underline{z}_{1_k} [\hat{f}_{1_k} + b_{11_2} w_{11_2} - y_{1_k}] \quad , \\
\underline{r}_{1_k} &= \bar{\underline{C}}_1 \underline{\bar{r}}_{1_k} \quad , \\
\underline{G}_{1_k} &= [\underline{I} - \tilde{\underline{A}}_{1_k}] \underline{R}_{1_k}^{-1} \quad , \\
\hat{\underline{\alpha}}_{1_{k+1}} &= \hat{\underline{\alpha}}_{1_k} - \underline{G}_{1_k} [\underline{R}_{1_k} \hat{\underline{\alpha}}_{1_k} + \underline{r}_{1_k}]
\end{aligned}$$

und für das zweite Untersystem durch die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\underline{\bar{R}}_{2_{k+1}} &= \bar{\underline{A}}_2 \underline{\bar{R}}_{2_k} + \bar{\underline{B}}_2 \underline{z}_{2_k} \underline{z}_{2_k}^T \quad , \\
\underline{R}_{2_k} &= \bar{\underline{C}}_2 \underline{\bar{R}}_{2_k} \quad , \\
\underline{\bar{r}}_{2_{k+1}} &= \bar{\underline{A}}_2 \underline{\bar{r}}_{2_k} + \bar{\underline{B}}_2 \underline{z}_{2_k} [\hat{f}_{2_k} - y_{2_k}] \quad , \\
\underline{r}_{2_k} &= \bar{\underline{C}}_2 \underline{\bar{r}}_{2_k} \quad , \\
\underline{G}_{2_k} &= [\underline{I} - \tilde{\underline{A}}_{2_k}] \underline{R}_{2_k}^{-1} \quad , \\
\hat{\underline{\alpha}}_{2_{k+1}} &= \hat{\underline{\alpha}}_{2_k} - \underline{G}_{2_k} [\underline{R}_{2_k} \hat{\underline{\alpha}}_{2_k} + \underline{r}_{2_k}] \quad .
\end{aligned}$$

12.0 Rekonstruierte Systemparameter berechnen :

Zunächst wird der Parameter $\hat{c}_{21_k}$ mit den Gleichungen

$$\underline{\hat{S}}_k^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \hat{s}_{21} & 1 \end{pmatrix}_k \quad , \quad \underline{\hat{S}}_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \hat{c}_{21} & 1 \end{pmatrix}_k$$

berechnet.
Die Parameter der Systemmatrix werden durch die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\left((\hat{\underline{a}}_{11} - \underline{k}_{11}) \; \hat{\underline{a}}_{12} \right)_k &= \left(\hat{\underline{d}}_{11} \hat{\underline{d}}_{12} \right)_k \underline{\hat{S}}_k \quad , \\
\left(\hat{a}_{21} \; (\hat{a}_{22} - k_{22}) \right)_k &= \left(\hat{d}_{21} \hat{d}_{22} \right)_k \underline{\hat{S}}_k
\end{aligned}$$

ermittelt. Die Parameter der Eingangsmatrix können direkt aus den Parametervektoren

$$\underline{\hat{\alpha}}_{1_k}^T = \left(\underline{\hat{d}}_{11}^T \quad \underline{\hat{d}}_{12}^T \quad \hat{b}_{11_1} \right)_k \quad ,$$
$$\underline{\hat{\alpha}}_{2_k}^T = \left(-\hat{s}_{21} \quad \hat{d}_{21} \quad \hat{d}_{22} \quad \hat{b}_{21} \right)_k$$

entnommen werden.

13.0 Ausgabe der rekonstruierten Zustände und Systemparameter :

Am Schluß des Algorithmus werden die rekonstruierten Systemparameter

$$\underline{\hat{a}}_{11_k}, \underline{\hat{a}}_{12_k} \quad ,$$
$$\underline{\hat{a}}_{21_k}, \underline{\hat{a}}_{22_k} \quad ,$$
$$\hat{b}_{11_{1_k}} \quad ,$$
$$\hat{b}_{21_k} \quad ,$$
$$\hat{c}_{21_k}$$

und die Systemzustände

$$\underline{\hat{x}}_{1_k}, \hat{x}_{2_k}$$

ausgegeben.

6.3 Über die Anregung durch die Eingangsgrössen

Nach der Definition 4.4.2.D ist der Eingangsvektor $\underline{u}_k \in R^r$ hinreichend angeregt, wenn die Folgen

$$u_{1_k}, u_{1_{k+1}}, ..., u_{1_{k+p}}, u_{2_k}, u_{2_{k+1}}, ..., u_{2_{k+p}}, ..., u_{r_k}, u_{r_{k+1}}, ..., u_{r_{k+p}} \tag{6.3-1}$$

linear unabhängig auf dem Intervall $k \in [k_0, \infty]$ sind.
Mit den Gleichungen (4.4.2-27) und (4.4.2-28) sind die Folgen dann linear unabhängig, wenn die Bedingung

$$\begin{aligned}
&\left[a_{1_0} + a_{1_1} z + a_{1_2} z^2 + ... + a_{1_p} z^p\right] \quad u_1(z) \quad + \\
&\left[a_{2_0} + a_{2_1} z + a_{2_2} z^2 + ... + a_{2_p} z^p\right] \quad u_2(z) \quad + \\
&\qquad\qquad\qquad

6.4 Simulationsergebnisse

Auf den folgenden Seiten wird in den Bildern 6.4.a bis 6.4.l die Rekonstruktion der Parameter und Zustände graphisch veranschaulicht. Die sprungförmige Veränderung der Parameter wurde entsprechend Tabelle 6.1.a bei k=30 durchgeführt.
Zur besseren Darstellung wurden die Punkte in den Diagrammen linear interpoliert.
Bei der schrittoptimalen Auslegung sind die Parameter und Zustände des ersten Untersystems mit k=37 und des zweiten Untersystems mit k=35 rekonstruiert.

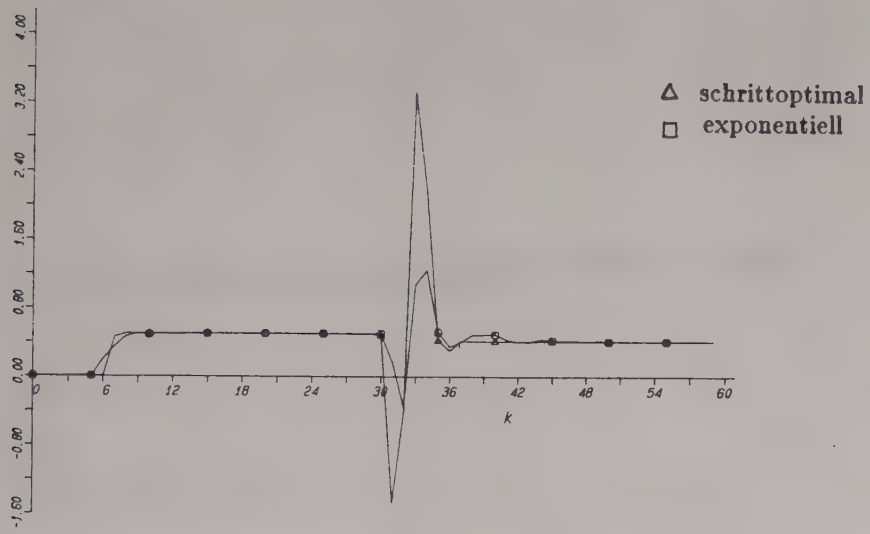

Bild 6.4.a: Adaption des Parameters a_{11_1} .

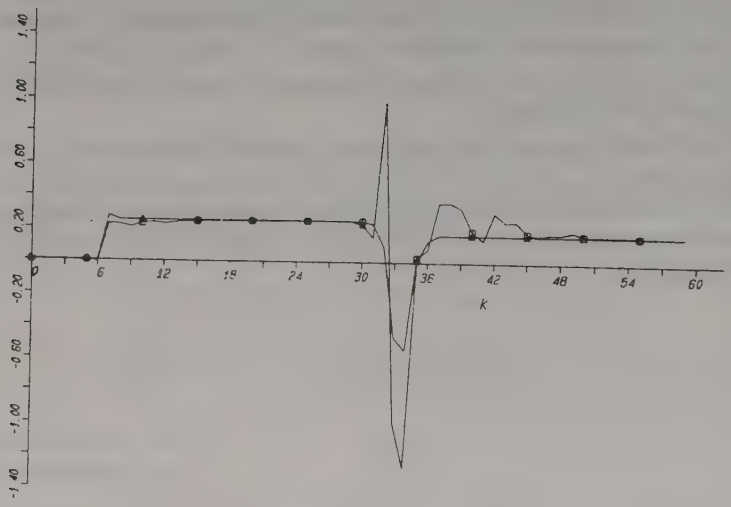

Bild 6.4.b: Adaption des Parameters a_{11_2} .

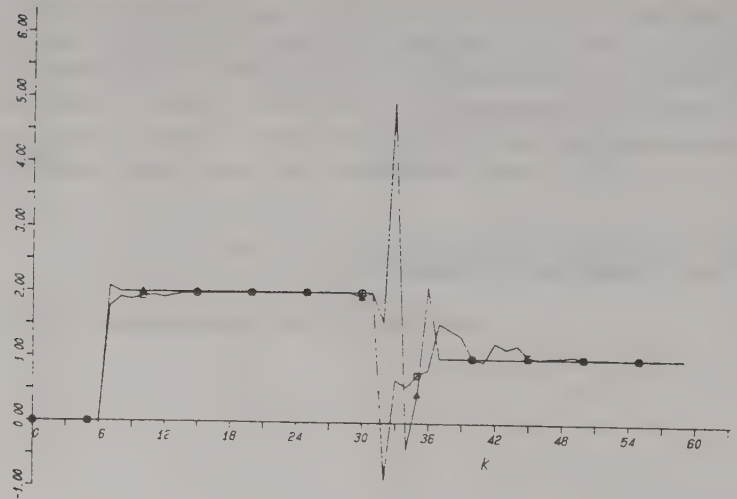

Bild 6.4.c: Adaption des Parameters a_{12_1} .

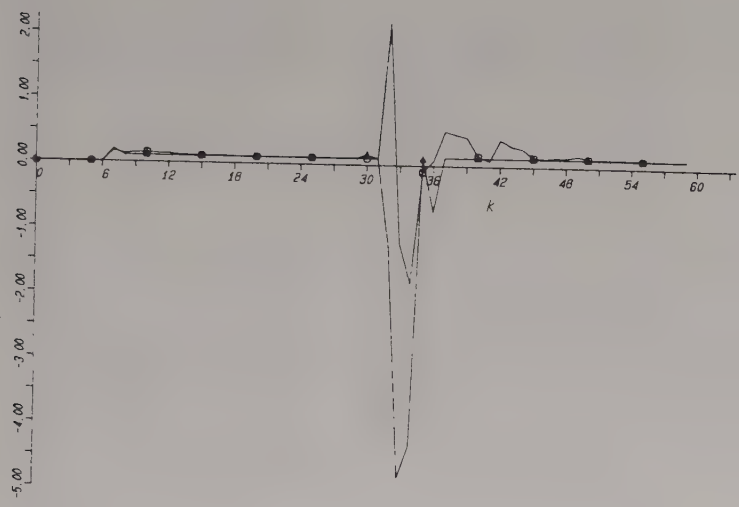

Bild 6.4.d: Adaption des Parameters a_{12_2} .

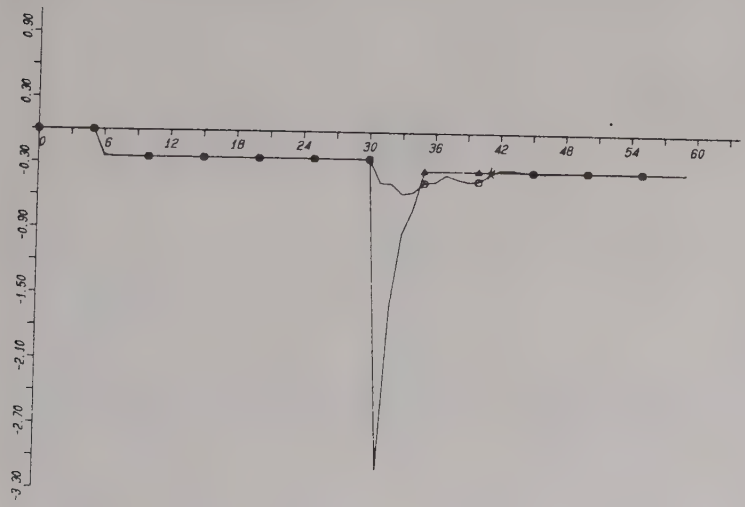

Bild 6.4.e: Adaption des Parameters a_{21_1} .

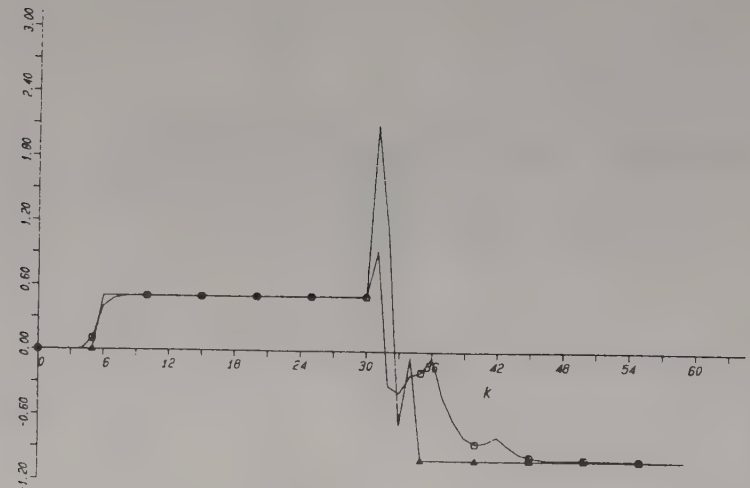

Bild 6.4.f: Adaption des Parameters a_{22_1} .

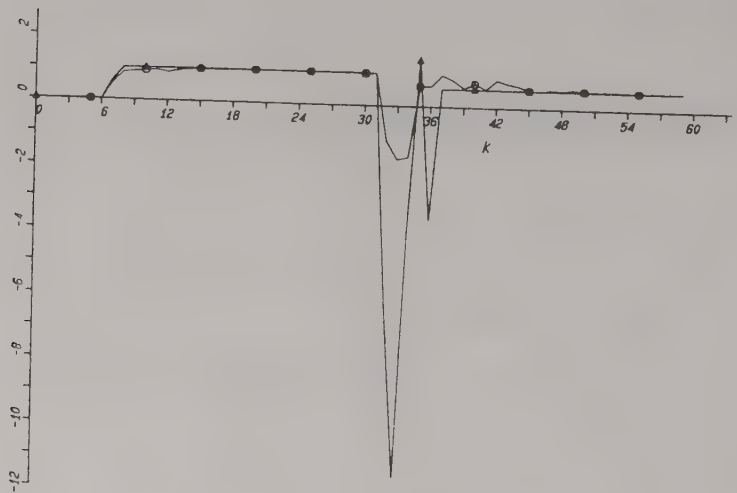

Bild 6.4.g: Adaption des Parameters b_{11_1} .

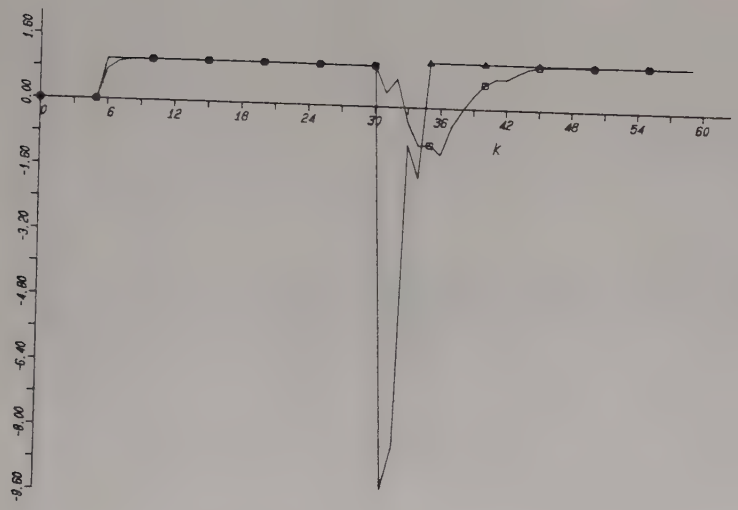

Bild 6.4.h: Adaption des Parameters b_{21_1} .

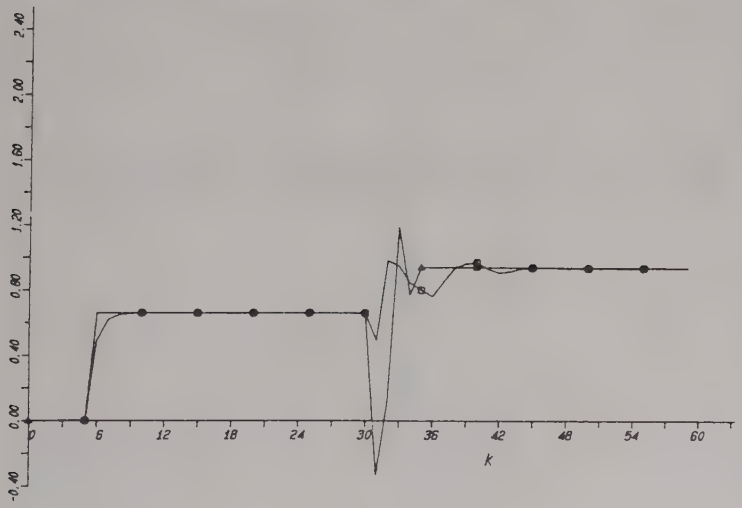

Bild 6.4.i: Adaption des Parameters c_{21} .

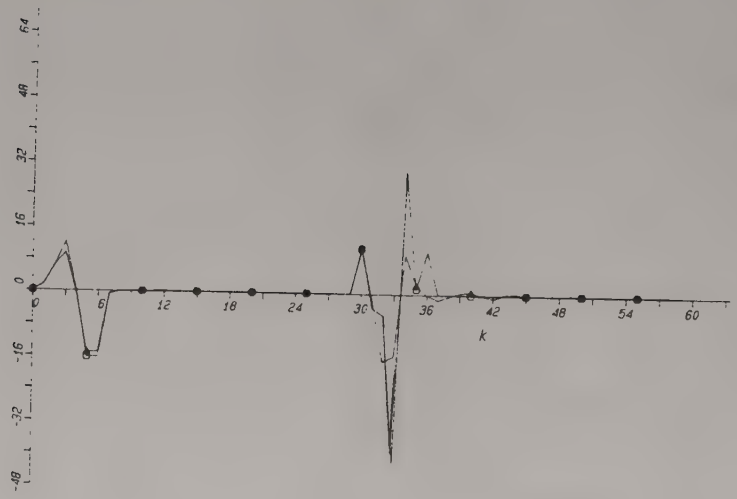

Bild 6.4.j: Verlauf des Zustandsfehlers $\tilde{x}_{11}$.

Bild 6.4.k: Verlauf des Zustandsfehlers $\tilde{x}_{12}$.

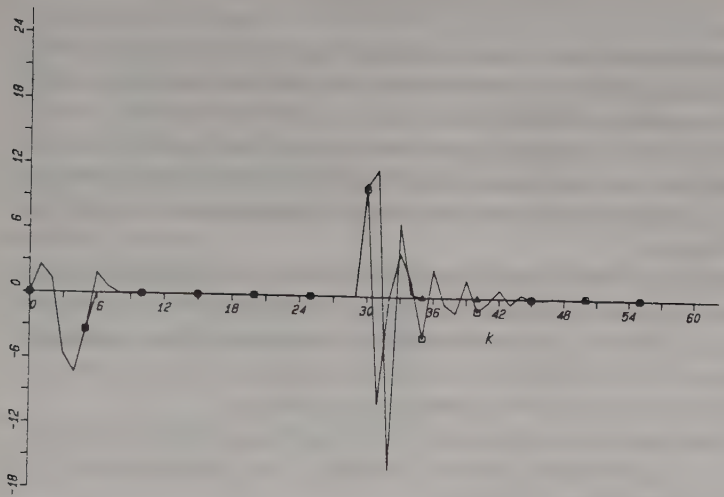

Bild 6.4.1: Verlauf des Zustandsfehlers $\tilde{x}_{21}$.

7.0 Zusammenfassung

Bei der Reglersynthese mit Zustandsrückführung wird vorausgesetzt, daß sämtliche Zustandsgrößen zugänglich sind. In den meisten Fällen wird diese Voraussetzung bei technischen Prozessen nicht erfüllt sein.
Dieses Argument war lange Zeit der Grund für eine Ablehnung der Zustandsrückführung in der Praxis. Die Verfügbarkeit des vollständigen Systemzustandes ist zweifellos ein Nachteil der Reglersynthese mit Zustandsrückführung.
Um den Nachteil zu beseitigen, wurden sogenannte Zustandsbeobachter entwickelt. Diese Zustandsbeobachter rekonstruieren den Systemzustand zum momentanen Zeitpunkt aus den vergangenen Ein- und Ausgangsmeßdaten. Für den Entwurf von Zustandsbeobachtern müssen genaue Kenntnisse über die Systemparameter vorliegen.
Diese Voraussetzung ist ebenfalls selten in der Praxis erfüllt, weil sich oftmals die Parameter durch äußere Einflüsse (z.B.: Alterung und Erwärmung von Bauteilen.) verändern.
Aus diesem Grund wurden adaptive Zustandsbeobachter entwickelt, die die Parameter und die Zustände aus den vergangenen Ein- und Ausgangsmeßdaten simultan rekonstruieren. Je größer die Konvergenzgeschwindigkeit des adaptiven Beobachters ist, desto schneller werden Parameterschwankungen adaptiert.
Aus der Vielzahl der bisher zu diesem Thema erschienenen Publikationen wurde in dieser Arbeit der zeitkontinuierliche adaptive Mehrgrößenbeobachter von Inoue, Iwai, Ishitobi und Tokumaru [10] als Ausgangspunkt ausgewählt.
Dieser Beobachter beruht auf einer erweiterten parametrisierten Struktur des Kalman-Beobachters, in der die Zustände eine lineare Funktion der Parameter sind. Parameter und Zustände werden bei diesem Beobachter mit exponentieller Konvergenz adaptiert.
Die Auslegung dieses zeitkontinuierlichen adaptiven Zustandsbeobachters ist problematisch im Sinne höchster Konvergenzgeschwindigkeit, weil ein auszulegener Vergessensfaktor nicht optimal gewählt werden kann. Bei zu klein gewähltem Vergessensfaktor wird keine Konvergenz des Parameter- und Zustandsfehlers erreicht. Zusätzlich benötigt der adaptive Zustandsbeobachter zur Realisierung eine so enorme Anzahl von analogen Integrierern und Multiplizierern, daß eine reale Ausführung aus technischen und wirtschaftlichen Gründen kaum empfehlenswert ist.
Durch einen verallgemeinerten Ansatz zur Parameteradaption, gelang es in dieser Arbeit, einen adaptiven zeitdiskreten Mehrgrößenbeobachter mit exponentieller bis schrittoptimaler Konvergenz vorzustellen. Das

Problem der optimalen Wahl des Vergessensfaktors und der möglichen Divergenz von Parameter- und Zustandsfehler ist somit gelöst.
Zusätzlich ist der adaptive Zustandsbeobachter in seiner Konvergenzgeschwindigkeit unempfindlich gegenüber den Anregungsamplituden der Eingangsgrößen. Das wurde in der Arbeit [**31**] für zeitdiskrete Einfachsysteme publiziert und hierher übertragen. Somit können die Parameter und Zustände bei linearen Systemen mit langsam zeitveränderlichen Parametern und konstanten Beobachtbarkeitsindices schneller und sicherer adaptiert werden.
Die zeitdiskrete Darstellung ermöglicht weiter eine wirtschaftlich und technisch sinnvolle Realisierung mit der Implementation der Beobachteralgorithmen auf Mikro- und Prozeßrechnern.

8.0 Verzeichnis der verwendeten Formelzeichen

Dieses Verzeichnis enthält die wichtigsten in der Arbeit vorkommenden Formelzeichen.

Symbol	Beschreibung	Definition
$\underline{\alpha}_i$	Parametervektor	(3.4 – 14)
$\underline{\alpha}_i^*$	Parametervektor des Systems	(4.0 – 5)
$\tilde{\underline{\alpha}}_{i_k}$	Parameterfehler	(4.1 – 1)
$\hat{\underline{\alpha}}_{i_k}$	Rekonstruierter Parametervektor	(4.0 – 6)
β	Faktor	(4.4.2 – 65)
γ	Faktor bei der Konvergenzanalyse	(4.4.2 – 63)
δ	Faktor bei der Konvergenzanalyse	(4.4.2 – 66)
λ	Faktor bei der Konvergenzanalyse	(4.4.2 – 64)
$\underline{a}_{ii}$	Koeffizientenvektor von $\underline{A}_{ii}$	(2.1 – 4)
$\underline{a}_{ij}$	Koeffizientenvektor von $\underline{A}_{ij}$	(2.1 – 5)
$\underline{A}'$	Systemmatrix	(2.0 – 1)
$\tilde{\underline{A}}_i$	Systemmatrix der Parameterfehlergleichung	(4.4.1 – 5)
$\bar{\underline{A}}_i$	Systemmatrix für Parameteradaption	(4.3 – 2)
$\underline{A}$	Systemmatrix in Normalform	(2.1 – 3)
$\underline{A}_{ii}$	Untermatrizen von $\underline{A}$	(2.1 – 4)
$\underline{A}_{ij}$	Untermatrizen von $\underline{A}$	(2.1 – 5)
$\underline{b}_{ij}$	Vekoren der Matrix $\underline{B}$	(2.1 – 6)
$\underline{B}'$	Eingansmatrix	(2.0 – 1)
$\underline{B}$	Eingansmatrix in Normalform	(2.1 – 6)
$\bar{\underline{B}}_i$	Eingangsmatrix für Parameteradaption	(4.3 – 2)
$\underline{c}_{ii}$	Vekoren der Matrix $\underline{C}$	(2.1 – 8)
c_{ij}	Element des Vektors $\underline{c}_{ij}$	(2.1 – 10)
$\underline{C}'$	Ausgansmatrix	(2.0 – 2)
$\bar{\underline{C}}_i$	Ausgansmatrix für Parameteradaption	(4.3 – 3)
$\underline{C}$	Ausgansmatrix in Normalform	(2.1 – 7)
$\underline{d}_{ij}$	Parametervektor	(3.1 – 20)
$\underline{E}_{i\nu}$	Transformationsmatrizen	(3.3 – 23)
f_{i_k}	Anfangszustand	(3.4 – 12)
$\tilde{f}_{i_k}$	Anfangsfehler	(4.1 – 2)
$\underline{G}_{i_k}$	Matrix bei der Parameteradaption	(4.2 – 4)

Symbol	Beschreibung	Definition
$\underline{i}_\nu$	Vektor	(3.3 – 5)
$\underline{k}_{ii}$	Koeffizientenvektor von $\underline{K}_i$	(3.1 – 3)
$\underline{K}_i$	Fehlermatrix	(3.1 – 3)
n	Systemordnung	(2.0 – 1)
n_i	Beobachtbarkeitsindex	(2.0 – 4)
m	Anzahl der Ausgänge	(2.0 – 1)
$\underline{P}_{ij_k}$	Besondere Zustandsmatrizen	(3.2 – 3)
$\underline{Q}_{ij_k}$	Besondere Zustandsmatrizen	(3.2 – 4)
$\underline{Q}$	Transformationsmatrix	(2.1 – 15)
$\underline{Q}_{ii}$	Untermatrizen von $\underline{Q}$	(2.1 – 16)
r	Anzahl der Eingänge	(2.0 – 1)
$\underline{r}_{i_k}$	Vektor bei der Parameteradaption	(4.2 – 8)
$\underline{R}_{i_k}$	Matrix bei der Parameteradaption	(4.2 – 7)
$\tilde{\underline{s}}_{i_k}$	Eingangsvektor der Parameterfehlergleichung	(4.4.1 – 6)
$\underline{S}$	Matrix mit Elementen c_{ij}	(3.1 – 16)
$\underline{T}_i$	Matrix	(3.1 – 10)
$\underline{u}_k$	Eingangsvektor	(2.1 – 1)
u_{i_K}	Element des Vektors $\underline{u}_k$	(2.1 – 12)
$\underline{v}_{ij_k}$	Besondere Zustandsvektoren	(3.3 – 24)
$\underline{w}_{ij_k}$	Besondere Zustandsvektoren	(3.3 – 24)
$\tilde{\underline{x}}_{i_k}$	Zustandsfehler eines Untersystems	(4.4.2 – 74)
$\hat{\underline{x}}_{i_k}$	Rekonstruierter Zustand eines Untersystems	(4.4.2 – 75)
$\underline{x}_k$	Systemzustand	(2.1 – 1)
$\underline{x}_{i_k}$	Untervektor von $\underline{x}_k$	(2.1 – 11)
$\underline{y}_k$	Ausgangsvektor	(2.1 – 2)
y_{i_k}	Element des Vektors $\underline{y}_k$	(2.1 – 13)
$\tilde{y}_{i_k}$	Ausgangsfehler eines Untersystems	(4.1 – 3)
$\underline{y}_{c_k}$	Besonderer Ausgangsvektor	(3.1 – 12)
$\underline{z}_{i_k}$	Vektor bei der parametrisierten Beschreibung	(3.4 – 13)

8.0 LITERATURVERZEICHNIS

[1] J. Ackermann, "Abtastreglung", Springer-Verlag, Berlin, 1972.

[2] B. D. O. Anderson and C. R. Johnson ,Jr., *Exponential convergence of adaptive identification and control algorithms*, Preprint of the 8th World Congress of IFAC, Kyoto (1981), 911–916.

[3] K. J. Åström, *Theory and application of adaptive control - A survey*, Automatica **19** (1983), 471–486.

[4] R. L. Caroll, *A reduced adaptive observer for multivariable systems*, Proc. 15th Automatic Control Conference (1974).

[5] R. L. Caroll and D. P. Lindorff, *An observer for single-input single-output linear systems*, IEEE Transactions on Automatic Control **AC-18** (1973), 428–435.

[6] O. Föllinger, "Lineare Abtastsysteme", Oldenbourg-Verlag München Wien, 1982.

[7] F. R. Gantmacher, "Matrizenrechnung I und II", VEB-Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1970.

[8] R. Guidorzi, *Canonical structures in identification of multivariable systems*, Automatica **11** (1975), 361–374.

[9] A. Inoue and Z. Iwai, *Design and application of reduced order adaptive observer with exponential rate of convergence for single-input single-output linear systems*, International Journal of Control **39** (1984), 375–393.

[10] A. Inoue, Z. Iwai, M.Ishitobi, H. Tokumaru, *Adaptive observer with exponential rate of convergence for multi-input multi-output systems*, Preprint of the 9th World Congress of IFAC, Budapest (1984), 224–229,.

[11] Z. Iwai, K. Mano, A. Inoue, and Y. Kawasaki, *An adaptive observer with exponential rate of convergence for single-input single-output linear systems*, Preprint of the 8th World Congress of IFAC, Kyoto (1981), 1087–1092.

[12] R. E. Kalman, *On the general theory of control systems*, 1th World Congress of IFAC, Moscow, Butterworth, London **1** (1960), 481–491.

[13] U. Korn und H.-H. Wilfert, "Mehrgrößenregelung", VEB-Verlag Technik Berlin , Springer-Verlag Wien New York, 1982.

[14] L. G. Kraft, *A control structure using an adaptive observer*, IEEE Transactions on Automatic Control (1979).

[15] G. Kreisselmeier, *Adaptive observer with exponential rate of convergence*, IEEE Transactions on Automatic Control **AC-22** (1977), 2–8.

[16] G. Kreisselmeier, *The generation of adaptive law structures for globally convergent adaptive observers*, IEEE Transactions on Automatic Control **AC-24** (1979), 510–513.

[17] G. Kreisselmeier, *Adaptive control via adaptive observation and asymptotic feedback matrix synthesis*, IEEE Transactions on Automatic Control **AC-25** (1980), 238–243.

[18] G. Kreisselmeier, *Algebraic separation in realizing a linear state feedback control law by means of an adaptive observer*, IEEE Transactions on Automatic Control **AC-25** (1980), 717–722.

[19] P. Kudva and K. S. Narendra, *Synthesis of an adaptive observer using Lyapunov's direct method*, International Journal of Control **18** (1973), 1201–1210.
[20] I. D. Landau, *A survey of model reference adaptive techniques - Theory and application*, Automatica.
[21] G. Ludyk, "Über die Stabilität zeitvarianter zeitdiskreter linearer Systeme", Berichte der Elektrotechnik, Universität Bremen, 1984.
[22] G. Ludyk, "Theorie dynamischer Systeme", Elitera-Verlag, 1977.
[23] G. Lüders and K. S. Narendra, *An adaptive observer for linear systems*, IEEE Transactions on Automatic Control **AC-18** (1973), 496–499.
[24] G. Lüders and K. S. Narendra, *Stable adaptive schemes for state estimation and identification of linear systems*, IEEE Transactions on Automatic Control **AC-19** (1974), 841–847.
[25] D. G. Luenberger, *Observing the state of linear systems*, IEEE Transactions on Automatic Control **AC-11** (1966), 190–197.
[26] J. O'. Reilly, "Observers for linear systems", Academic Press, 1983.
[27] G. N. Saridis, "Self organizing control of stochastic systems", Marcel Dekker Inc. New York and Basel.
[28] L. C. Suen and R. Lion, *Determination of structure of multivariable stochastic linear systems*, IEEE Transactions on Automatic Control **AC-23** (1977), 458–464.
[29] A. Suhl, "Entwurf eines adaptiven Zustandsbeobachters", Dissertation, Universität Bremen, 1984.
[30] H. Unbehauen, "Regelungstechik I, II und III", Vieweg-Verlag, 1984.
[31] W. Wöhlke, "Optimaler zeitdiskreter Beobachter", Diplomarbeit, Universität Bremen, 1983.
[32] S. Y. Yan, N. Adachi and H. Tokumaru, *Finite time setting adaptive observer for multi-input multi-output systems*, Transactions of Society of Instrument and Control Engineers (in Japanese) **19**, 124–129.
[33] H. W. Yang, H. Itakura and Y. Nishikawa, *Two approaches for adaptive observer in multi-output systems*, Preprint of the 8th World Congress of IFAC, Kyoto (1981), 1093–1098.
[34] R. Zurmühl, "Matrizen", Springer-Verlag, 1964.

Druck und Verarbeitung: Dissertations Druck Darmstadt, Tel. 0 61 51 / 21 3 53